64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh okresného kola kategórie Z6*

<u>*Informácia pre obvodnú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: `skmo.sk`*. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* `skmo@skmo.sk` *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* `skmo.sk/dokument.php?id=429` *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X. Y. a práve traja žiaci (vrátane X. Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X. Y., tak žiakovi X. Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

---

1. *Fabián má štyri kartičky, na každú z nich napísal jedno celé kladné číslo menšie ako 10. Čísla napísal štyrmi rôznymi farbami, pričom platí:*

- *Súčin zeleného a žltého čísla je zelené číslo.*
- *Modré číslo je rovnaké ako červené číslo.*
- *Súčin červeného a modrého čísla je dvojciferné číslo zapísané zelenou a žltou cifrou (v tomto poradí).*

Určte tieto štyri čísla. (Michaela Petrová)

Riešenie. Fabián písal iba prirodzené čísla. Z prvej podmienky vyplýva, že keď vynásobíme zelené číslo žltým, nezmeníme jeho hodnotu. To znamená, že žlté číslo je 1. Z druhej podmienky vyplýva, že modrou a červenou napísal rovnaké číslo. Z tretej podmienky potom vyplýva, že keď vynásobíme dve červené (resp. dve modré) čísla, dostaneme ako súčin dvojciferné číslo končiace jednotkou (žlté číslo je 1). Prejdeme teda všetky možnosti:

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 2 \cdot 2 = 4, \quad 3 \cdot 3 = 9, \quad 4 \cdot 4 = 16,$$
$$5 \cdot 5 = 25, \quad 6 \cdot 6 = 36, \quad 7 \cdot 7 = 49, \quad 8 \cdot 8 = 64, \quad 9 \cdot 9 = 81.$$

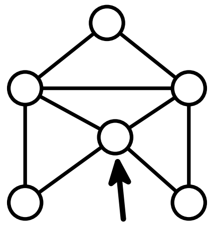
Uvedenej podmienke vyhovuje jediná, a to posledná možnosť. Fabián napísal červenou číslo 9, modrou číslo 9, zelenou číslo 8 a žltou číslo 1.

Návrh hodnotenia. 2 body za určenie žltého čísla, z toho 1 bod za zdôvodnenie; 3 body za prešetrenie všetkých možností a za nájdenie súčinu $9 \cdot 9 = 81$; 1 bod za správne určenie zvyšných troch čísel.

Ak riešiteľ neuvedie všetky možnosti súčinu (má iba výsledný súčin $9 \cdot 9 = 81$), nezdôvodní, že viac riešení nie je, a ani nevysvetlí, že prešiel všetky možnosti a iné riešenie nenašiel, dajte nanajvýš 4 body.

Priradenie farieb jednotlivým číslam nie je nutnou súčasťou riešenia, preto ho nijako bodovo nepostihujte.

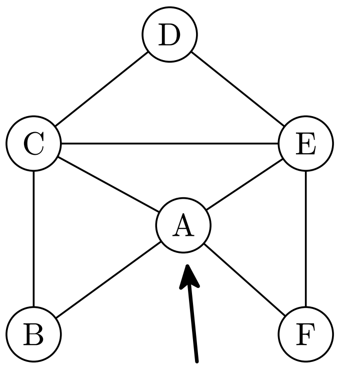
2. *Na deň detí otvorili v ZOO bludisko so šiestimi stanoviskami, na ktorých sa rozdávali cukríky. Na jednom stanovisku sa pri každom vstupe rozdávalo 5 cukríkov, na dvoch stanoviskách sa rozdávali 3 cukríky a na troch stanoviskách 1 cukrík. Juraj najskôr vstúpil na stanovisko označené šípkou a pokračoval tak, že každou cestičkou prešiel nanajvýš raz. Určte, koľko najviac cukríkov mohol Juraj dostať.* (Erika Novotná)



Riešenie. Najviac cukríkov môže Juraj dostať, keď každou cestičkou prejde práve raz a na stanoviskách, ktorými prechádza najčastejšie, sa rozdáva najviac cukríkov. Prejsť bludiskom uvedeným spôsobom je možné, pozri napr. cestu

A—B—C—D—E—C—A—E—F—A

podľa označenia ako na obrázku.



Existujú aj iné možné cesty, ktoré však nie je nutné rozoberať. Podstatné je, že vieme určiť, koľkokrát sa dá do každého stanoviska vstúpiť. To nezávisí od zvolenej cesty, ale iba od počtu cestičiek, ktoré do daného stanoviska vedú. Do stanovísk B, F a D vedú dve cestičky, do stanovísk A, C a E vedú štyri cestičky. Pritom do stanoviska A sa vstupuje zvonku, ostatnými stanoviskami sa dá iba prejsť (tzn. koľkokrát sa vstúpi, toľkokrát sa vystúpi). Platí teda, že

- do stanoviska A môže Juraj vstúpiť trikrát (raz zvonku, raz prechádza a naposledy tu končí),
- do každého zo stanovísk C a E môže Juraj vstúpiť dvakrát (t. j. dvakrát prechádza),
- do každého zo stanovísk B, D a F môže Juraj vstúpiť iba raz (t. j. raz prechádza).

Juraj teda mohol získať najviac cukríkov, ak by sa na stanovisku A rozdávalo 5 cukríkov, na stanoviskách C a E po 3 cukríkoch a na zvyšných stanoviskách po 1 cukríku. V takom prípade by Juraj získal na jednom stanovisku trikrát po 5 cukríkoch, na dvoch stanoviskách dvakrát po 3 cukríkoch a na troch stanoviskách po 1 cukríku, t. j.

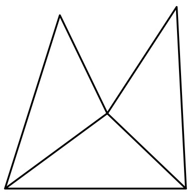
$$3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 30$$

cukríkov.

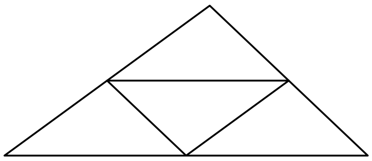
Návrh hodnotenia. 2 body za určenie nejakej cesty, ktorá prechádza každou cestičkou práve raz; 2 body za vyčíslenie navštevovanosti jednotlivých stanovísk; 1 bod za priradenie počtu rozdávaných cukríkov jednotlivým stanoviskám; 1 bod za zodpovedajúci celkový zisk cukríkov.

---

3. *Jano mal štyri zhodné trojuholníky. Skladal z nich rôzne útvary, a to tak, že trojuholníky k sebe prikladal stranami rovnakej dĺžky. Najskôr zložil útvar z troch trojuholníkov ako na prvom obrázku, ktorý mal obvod 43 cm. Potom útvar rozobral a zložil iný útvar z troch trojuholníkov, ktorý mal obvod 35 cm. Nakoniec zo všetkých štyroch trojuholníkov zložil ďalší útvar ako na druhom obrázku, a ten mal obvod 46 cm. Určte dĺžky strán trojuholníkov.* (Eva Patáková)

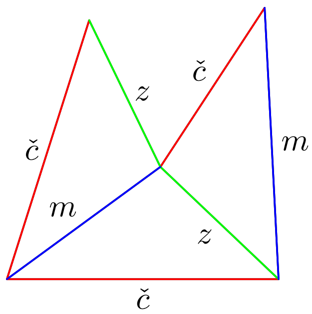


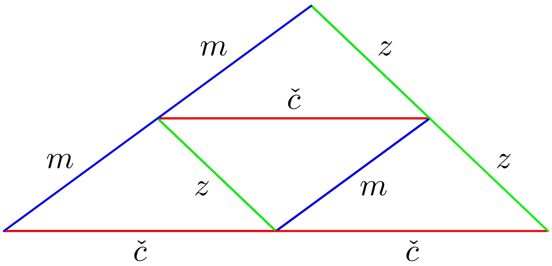
Obr. 1



Obr. 2

Riešenie. Navzájom zhodné strany v použitých trojuholníkoch môžeme rozlíšiť farebne – použijeme napr. červenú, zelenú a modrú farbu, zodpovedajúce dĺžky v centimetroch označíme $č$, z a m:





V obvode posledného útvaru je strana každej farby zastúpená práve dvakrát. Tento obvod je rovný

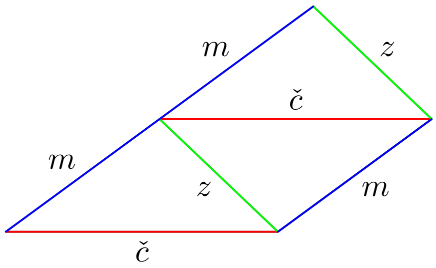
$$2 \cdot (č + z + m) = 46,$$

preto je obvod jedného trojuholníka rovný 23 cm. V obvode prvého útvaru sú tri červené strany, jedna zelená a jedna modrá, čo je to isté ako dve červené strany a strany obvodu jedného trojuholníka. Tento obvod je rovný

$$3č + z + m = 2č + (č + z + m) = 43.$$

Obvod jedného trojuholníka je 23 cm, preto $2č = 43 - 23 = 20$ (cm) a dĺžka jednej strany trojuholníka je $č = 10$ (cm).

Druhý útvar (ktorý nie je v zadaní zobrazený) je zložený z troch trojuholníkov podľa rovnakých pravidiel ako prvý, napr. takto:



Obvod tohto útvaru pozostáva z jednej červenej, jednej zelenej a troch modrých strán, čo je to isté ako strany obvodu jedného trojuholníka a dve modré strany navyše. Tento obvod je podľa zadania rovný

$$č + z + 3m = (č + z + m) + 2m = 35.$$

Rovnako ako vyššie určíme dĺžku druhej zo strán trojuholníka: $2m = 35 - 23 = 12$ (cm), teda $m = 6$ (cm). Zo znalosti obvodu a dvoch strán v trojuholníku vyjadríme dĺžku strany tretej: $z = 23 - 10 - 6 = 7$ (cm).

Dĺžky strán Janových trojuholníkov sú 10 cm, 6 cm a 7 cm. (Výsledok je v súlade s trojuholníkovou nerovnosťou.)

Návrh hodnotenia. 2 body za určenie obvodu trojuholníka; 2 body za určenie dĺžky jednej strany; po 1 bode za určenie dĺžok zvyšných dvoch strán.

Poznámka. Pri druhom útvare možno uvažovať ešte iné spôsoby zloženia – v každom prípade sa v obvode útvaru objavuje vždy jedna strana trojuholníka viackrát. Pri uvedenom označení by nanajvýš vyšli dĺžky strán z a m naopak, čo je ekvivalentné inému označeniu na začiatku. V riešení úlohy nie je nutné všetky možnosti rozoberať.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Ján Brajerčík, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, E. Patáková, K. Pazourek, M. Petrová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Filip Hanzely, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015