64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z7

Informácia pre obvodnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. *Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* skmo@skmo.sk *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* skmo.sk/dokument.php?id=429 *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

---

1. *Nájdite všetky prirodzené čísla od 90 do 150 také, že ciferný súčet ich ciferného súčtu je rovný 1.* (Eva Patáková)

Riešenie. Hľadané číslo je nanajvýš trojciferné, preto je jeho ciferný súčet nanajvýš dvojciferné číslo. Aby bol ciferný súčet tohto čísla rovný 1, musí byť ciferný súčet hľadaného čísla 1 alebo 10. Jediné prirodzené číslo od 90 do 150 s ciferným súčtom 1 je číslo 100. Všetky prirodzené čísla od 90 do 150 s ciferným súčtom 10 sú 91, 109, 118, 127, 136, 145. Úloha má celkom sedem riešení:

$$91, \quad 100, \quad 109, \quad 118, \quad 127, \quad 136, \quad 145.$$

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za odhalenie možných ciferných súčtov 1 a 10; zvyšné 4 body rozdeľte podľa počtu nájdených riešení (4 body za všetkých 7 riešení, 3 body za 6 či 5 riešení, 2 body za 4 či 3 riešenia, 1 bod za 2 či 1 riešenie).

---

2. *Siedme triedy z našej školy súťažili v zbieraní vrchnákov z PET fliaš. Trieda A nazbierala štvrtinu toho, čo triedy B a C dokopy, trieda B nazbierala pätinu toho, čo triedy A a C dokopy, a trieda C nazbierala 570 vrchnákov. Určte, koľko vrchnákov nazbierali tieto tri triedy spolu.* (Marta Volfová)

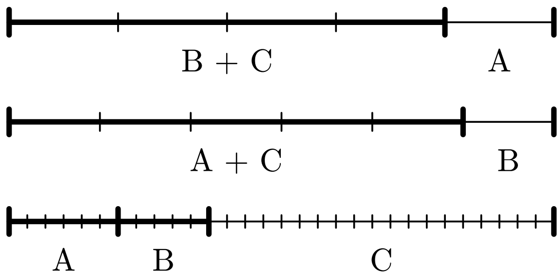
Riešenie. Trieda A nazbierala štvrtinu toho, čo triedy B a C dokopy; to znamená, že trieda A nazbierala pätinu celkového počtu vrchnákov. Trieda B nazbierala pätinu toho, čo triedy A a C dokopy; to znamená, že trieda B nazbierala šestinu celkového počtu vrchnákov. Triedy A a B teda dokopy nazbierali

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{11}{30}$$

celkového počtu vrchnákov.

Trieda C tak nazbierala $\frac{19}{30}$ celkového počtu vrchnákov, čo bolo 570 kusov. Z toho vyplýva, že tridsatinu celkovej zbierky tvorilo $570 : 19 = 30$ vrchnákov. Celkom teda všetky triedy dokopy nazbierali $30 \cdot 30 = 900$ vrchnákov.

Pomocné grafické znázornenie je na nasledujúcom obrázku:



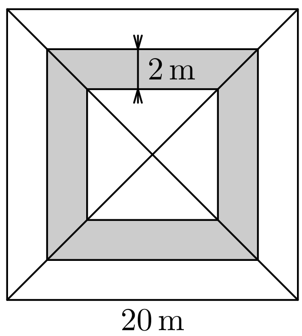
Návrh hodnotenia. 2 body za poznatok, že trieda A nazbierala pätinu celkového počtu vrchnákov; 1 bod za obdobný poznatok pre triedu B; 2 body za poznatok, že trieda C nazbierala $\frac{19}{30}$ celkového počtu; 1 bod za doriešenie úlohy.

---

3. *Prebieha rekonštrukcia námestia v tvare štvorca so stranou 20 metrov. Keby bolo celé vydláždené lacnejšou svetlou dlažbou, boli by náklady na materiál 10 000 €. Keby bolo celé námestie pokryté drahšou tmavou dlažbou, stál by materiál 30 000 €. Architekt však v centrálnej časti námestia navrhol svetlú štvorcovú časť, ktorá bude olemovaná pruhom tmavej dlažby o šírke 2 metre, a vo vonkajšej časti námestia bude rovnaká svetlá dlažba ako uprostred, pozri obrázok. Podľa tohto návrhu budú náklady na materiál tmavej časti rovnaké ako na celkový materiál svetlých častí. Určte:*

- *koľko stojí materiál na vydláždenie námestia podľa tohto projektu,*
- *aká dlhá je strana svetlého štvorca v centrálnej časti námestia.*

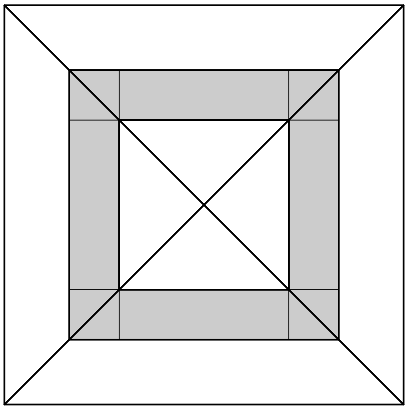
(*Libor Šimůnek*)



Riešenie. a) Svetlá dlažba je trikrát lacnejšia ako tmavá. Náklady na svetlú a tmavú časť námestia sú rovnaké, preto je svetlá časť plochy trikrát väčšia ako tmavá. Tmavá časť tak tvorí jednu štvrtinu námestia, náklady na ňu sú $30\,000 : 4 = 7\,500$ (€). Náklady na svetlú časť sú rovnaké. Dlažba na celé námestie podľa daného projektu teda stojí

$$2 \cdot 7\,500 = 15\,000 \text{ (€)}.$$

b) Celé námestie má plochu $20 \cdot 20 = 400\,(\mathrm{m}^2)$. Z predchádzajúcej časti vieme, že tmavšia plocha tvorí štvrtinu námestia, teda $400 : 4 = 100\,(\mathrm{m}^2)$. Túto plochu môžeme vyjadriť ako súčet štyroch rovnakých štvorcov a štyroch rovnakých obdĺžnikov, pozri obrázok.



Každý zo zmienených štvorcov má obsah $2 \cdot 2 = 4\,(\mathrm{m}^2)$, zvyšná časť tmavej plochy má obsah $100 - 4 \cdot 4 = 84\,(\mathrm{m}^2)$. Obsah každého zo zmienených obdĺžnikov je preto rovný $84 : 4 = 21\,(\mathrm{m}^2)$. Jedna strana obdĺžnika meria $2\,\mathrm{m}$, dĺžka druhej strany je teda

$$21 : 2 = 10{,}5\,(\mathrm{m}),$$

a to je zároveň dĺžka strany svetlého štvorca v centrálnej časti námestia.

Návrh hodnotenia. 2 body za úlohu a), z toho 1 bod za vysvetlenie; 4 body za úlohu b), z toho 3 body za vysvetlenie (napr. 1 bod za obsah tmavej plochy, 1 bod za nápad oddeliť štvorce v rohoch, 1 bod za obsah pomocného obdĺžnika).

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Ján Brajerčík, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, E. Patáková, K. Pazourek, M. Petrová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Filip Hanzely, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015