64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z8

<u>Informácia pre obvodnú komisiu MO:</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

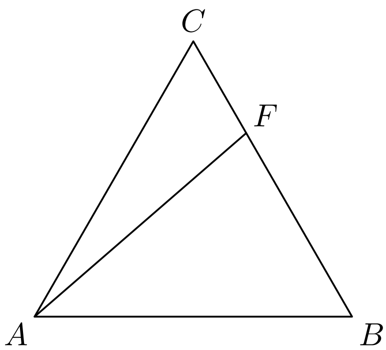
Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk*. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* skmo@skmo.sk *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* skmo.sk/dokument.php?id=429 *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

---

1. *V rovnostrannom trojuholníku ABC leží na strane BC bod F. Obsah trojuholníka ABF je trikrát väčší ako obsah trojuholníka ACF a rozdiel obvodov týchto dvoch trojuholníkov je 5 cm. Určte dĺžku strany trojuholníka ABC.* (Eva Patáková)

Riešenie. Trojuholníky ABF a ACF majú spoločnú výšku zo spoločného vrcholu A, preto sú obsahy týchto trojuholníkov v rovnakom pomere ako dĺžky strán, ktoré sú vrcholu A protiľahlé. Platí teda $|BF| = 3|CF|$.



Strana AF je obom trojuholníkom spoločná a strany AB a AC sú zhodné, pretože trojuholník ABC je rovnostranný. Z daného vzťahu pre obvody týchto trojuholníkov vyplýva

$$|BF| = |CF| + 5\,\mathrm{cm}.$$

Z predchádzajúceho odseku vieme, aký je vzťah medzi veľkosťami strán BF a CF, takže môžeme určiť veľkosť jednej z týchto úsečiek:

$$3|CF| = |CF| + 5\,\mathrm{cm},$$
$$|CF| = 2{,}5\,\mathrm{cm}.$$

Dĺžka strany trojuholníka ABC je teda rovná

$$|BC| = |BF| + |CF| = 4|CF| = 10\,\mathrm{cm}.$$

Návrh hodnotenia. 2 body za určenie pomeru dĺžok úsečiek BF a CF; 1 bod za zistenie, že dĺžky strán AF, AB, resp. AC do rozdielu obvodov neprispievajú; 3 body za doriešenie úlohy.

2. *Traja hudobníci Janek, Mikeš a Vávra si zvyčajne rozdelia spoločný honorár v pomere* $4:5:6$*, najmenej dostane Janek a najviac Vávra. Tentoraz Vávra nehral dobre, a tak sa svojho podielu vzdal. Janek navrhol, že si Vávrovu časť rozdelia s Mikešom na polovice. Mikeš však trval na tom, aby si aj túto časť rozdelili nerovnomerne ako zvyčajne, teda v pomere* $4:5$*. Mikeš by totiž podľa Jankovho návrhu dostal o 4 € menej ako podľa svojho. Určte výšku spoločného honorára.* (*Libor Šimůnek*)

Riešenie. Zadaný postupný pomer $4:5:6$ rozšírime tak, aby sme mohli jeho tretí člen vhodne rozdeliť ako podľa Jankovho návrhu (delenie v pomere $1:1$), tak podľa Mikešovho návrhu (delenie v pomere $4:5$). Pomer preto rozšírime tak, aby jeho tretí člen bol deliteľný dvoma a súčasne deviatimi, rozšírime ho teda troma:

$$12:15:18.$$

Suma pôvodne určená pre Vávru sa skladá z 18 rovnakých dielov, z ktorých Janek navrhuje prideliť 9 sebe a 9 Mikešovi, zatiaľ čo Mikeš navrhuje dať 8 dielov Jankovi a 10 sebe. Podľa Jankovho návrhu by tak Mikeš dostal o 1 diel menej ako podľa svojho vlastného návrhu. Tento diel zodpovedá 4 €. Spoločný honorár pre hudobníkov bol tvorený 45 takýmito dielmi ($12+15+18=45$), celkom teda dostali

$$45 \cdot 4 = 180\ (\text{€}).$$

Návrh hodnotenia. 2 body za výsledok; 4 body za postup riešenia.

3. *Keď jeden rozmer kvádra zdvojnásobíme, druhý rozmer kvádra predelíme dvoma a tretí rozmer zväčšíme o 6 cm, dostaneme kocku, ktorá má rovnaký povrch ako pôvodný kváder. Určte rozmery tohto kvádra.* (*Michaela Petrová*)

Riešenie. Vyjdeme od konca, tzn. z rozmerov výslednej kocky spätne odvodíme rozmery pôvodného kvádra. Ak označíme dĺžku hrany kocky v centimetroch x, tak jeden rozmer kvádra je $\frac{1}{2}x$ (dvojnásobok tejto dĺžky je dĺžka hrany kocky), druhý rozmer kvádra je $2x$ (polovica tejto dĺžky je dĺžka hrany kocky) a tretí rozmer je $x-6$ (táto dĺžka zväčšená o 6 cm je dĺžka hrany kocky).

Povrch výslednej kocky je $6x^2$, zatiaľ čo povrch pôvodného kvádra je rovný

$$2\left(\frac{x}{2}\cdot 2x + \frac{x}{2}\cdot(x-6) + 2x\cdot(x-6)\right) = 2x^2 + x^2 - 6x + 4x^2 - 24x = 7x^2 - 30x.$$

Keďže oba povrchy sú si rovné, dostávame rovnicu

$$\begin{aligned} 6x^2 &= 7x^2 - 30x, \\ 0 &= x^2 - 30x = x\cdot(x-30). \end{aligned}$$

Keďže x nemôže byť nula (x je dĺžka hrany kocky), musí byť $x = 30\,(\text{cm})$.

Rozmery pôvodného kvádra teda sú:

$$\frac{30}{2} = 15\,(\text{cm}), \quad 2\cdot 30 = 60\,(\text{cm}), \quad 30-6 = 24\,(\text{cm}).$$

Návrh hodnotenia. 1 bod za vyjadrenie rozmerov kvádra pomocou dĺžky hrany kocky; po 1 bode za vyjadrenie povrchu každého z telies; 2 body za vyriešenie rovnice (a to aj v prípade, že riešiteľ nevysvetlí nenulovosť x); 1 bod za výpočet rozmerov pôvodného kvádra.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Ján Brajerčík, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, E. Patáková, K. Pazourek, M. Petrová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Filip Hanzely, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015