2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

1. *Ak zväčšíme čitateľ aj menovateľ istého zlomku o 1, dostaneme zlomok o hodnotu 1/20 väčší. Ak urobíme s väčším zlomkom rovnakú operáciu, dostaneme zlomok o hodnotu 1/12 väčší, ako bola hodnota zlomku na začiatku. Určte všetky tri zlomky.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Označme a/b pôvodný zlomok. Podľa zadania platia rovnosti

$$\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{a+2}{b+2}-\frac{a}{b}=\frac{1}{12} \quad (a,b\in\mathbb{N}),$$

ktoré sú ekvivalentné so vzťahmi

$$20b(a+1)-20a(b+1)=b(b+1) \quad \text{a} \quad 12b(a+2)-12a(b+2)=b(b+2).$$

Tie upravíme na tvar $19b-20a=b^2$ a $22b-24a=b^2$. Po odčítaní oboch vzťahov zistíme, že $4a=3b$, čo po dosadení do druhej rovnosti dá $22b-18b=b^2$, čiže $b^2=4b$. Vzhľadom na podmienku $b\neq 0$ odtiaľ vyplýva $b=4$ a $a=3$.

Hľadané zlomky sú teda $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ a $\frac{5}{6}$.

Iné riešenie. Označme a/b pôvodný zlomok. Zo vzťahov

$$\frac{1}{20}=\frac{1}{4\cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{1}{12}=\frac{1}{4\cdot 3}=\frac{2}{4\cdot 6}$$

možno odhadnúť, že riešením by mohlo byť $b=4$. Potom

$$\frac{4(a+1)-5a}{4\cdot 5}=\frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{4(a+2)-6a}{4\cdot 6}=\frac{1}{12},$$

čiže $a=3$. Musíme sa však ešte presvedčiť, že úloha iné riešenie nemá. Podmienky úlohy vedú ku vzťahom

$$\frac{b-a}{b(b+1)}=\frac{1}{4\cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{2(b-a)}{b(b+2)}=\frac{2}{4\cdot 6}.$$

Z podielu ich ľavých a pravých strán potom vyplýva

$$\frac{b+2}{b+1}=\frac{6}{5},$$

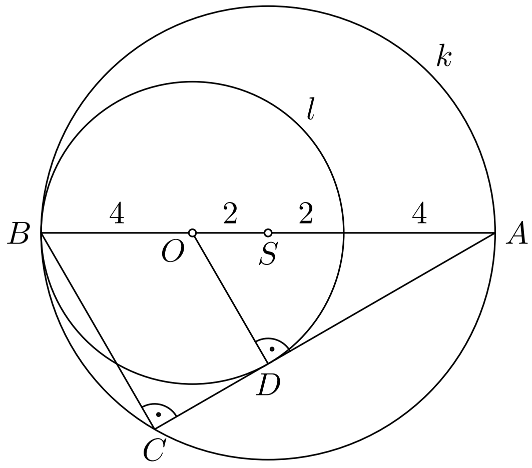
čomu vyhovuje jedine $b=4$.

Poznámka. V úplnom riešení nesmie chýbať vylúčenie možnosti $b\neq 4$. Napríklad z podobných rovností $1/20=30/24\cdot 25$ a $1/12=52/24\cdot 26$ by sme mohli hádať, že $b=24$, čo riešením nie je.

Za úplné a správne zdôvodnené riešenie dajte 6 bodov, z toho najviac 3 body za zostavenie a vhodnú úpravu rovníc (typicky na dve rovnice o dvoch neznámych s odstránenými zlomkami). Ak riešiteľ objaví ako riešenie zlomok 3/4, avšak nezdôvodní, prečo iné riešenie neexistuje, dajte iba 1 bod, pripadne 2 body, ak sa riešiteľ o nejaké algebraické zdôvodnenie pokúsi.

2. *Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ majú vnútorný dotyk v bode B. Určte dĺžky strán trojuholníka ABC, pričom bod A je priesečník priamky OB s kružnicou k a bod C je priesečník kružnice k s dotyčnicou z bodu A ku kružnici l.* (Pavel Leischner)

Riešenie. Bod dotyku kružnice l s dotyčnicou z bodu A označme D (obr. 1). Z vlastností dotyčnice ku kružnici vyplýva, že uhol ADO je pravý. Zároveň je pravý aj uhol



Obr. 1

ACB (Tálesova veta). Trojuholníky ABC a AOD sú tak podobné podľa vety uu, lebo sa zhodujú v uhloch ACB, ADO a v spoločnom uhle pri vrchole A. Z uvedenej podobnosti vyplýva

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \tag{1}$$

Zo zadaných číselných hodnôt vychádza $|OD| = |OB| = 4\,\mathrm{cm}$, $|OS| = |SB| - |OB| = 2\,\mathrm{cm}$, $|OA| = |OS| + |SA| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|AB| = 12\,\mathrm{cm}$. Podľa (1) je teda $|BC| : 4\,\mathrm{cm} = 12 : 8$ a odtiaľ $|BC| = 6\,\mathrm{cm}$. Z Pytagorovej vety pre trojuholník ABC nakoniec zistíme, že $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2}\,\mathrm{cm} = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

Za úplné a správne zdôvodnené riešenie dajte 6 bodov. Z toho 2 body za obrázok a zdôvodnenie pravých uhlov, 2 body za zdôvodnenie podobnosti trojuholníkov a zostavenie potrebnej rovnice, 2 body za dopočítanie dĺžok strán BC a AC.

3. *Nájdite všetky dvojice nezáporných celých čísel a, b, pre ktoré platí*

$$a^2 + b + 2 = a + b^2.$$

(Ján Mazák)

Riešenie. Rovnicu prepíšeme na tvar $2 = (b^2 - a^2) - (b - a)$, z ktorého po využití vzťahu pre rozdiel štvorcov a následnom vyňatí výrazu $b - a$ dostaneme $2 = (b - a)(a + b - 1)$. Keďže 2 je prvočíslo, máme pre uvedený súčin nasledujúce štyri možnosti:

a) $b - a = 1$ a $a + b - 1 = 2$, potom $a = 1$ a $b = 2$.

b) $b - a = 2$ a $a + b - 1 = 1$, potom $a = 0$ a $b = 2$.

c) $b-a=-1$ a $a+b-1=-2$. Druhú rovnicu možno prepísať na tvar $a+b=-1$, z ktorého vidíme, že rovnosť nenastane pre žiadnu dvojicu nezáporných celých čísel.

d) $b-a=-2$ a $a+b-1=-1$. Druhú rovnicu možno prepísať na tvar $a+b=0$, z ktorého vidíme, že vyhovuje jediná dvojica nezáporných celých čísel $a=b=0$, ktorá však nevyhovuje prvej rovnici.

Záver. Úloha má dve riešenia: Buď $a=1$ a $b=2$, alebo $a=0$ a $b=2$.

Poznámka. Namiesto rozboru štyroch možností môžeme začať úvahou, že nulové čísla a, b nie sú riešením úlohy, takže $a+b-1 \geqq 0$, a teda aj $b-a \geqq 0$. Stačí teda uvažovať iba možnosti a) a b).

Iné riešenie. Rovnicu upravíme na tvar $2=(b^2-b)-(a^2-a)$, resp. na tvar $2=b(b-1)-a(a-1)$. Z nasledujúcej tabuľky a tvaru čísel $x^2-x=x(x-1)$ je zrejmé, že rozdiely medzi susednými hodnotami výrazov $x(x-1)$ rastú s rastúcim x (ľahko sa o tom presvedčíme výpočtom: $(x+1)x-x(x-1)=2x$).

x	0	1	2	3	4	5	...
$x(x-1)$	0	0	2	6	12	20	...

Môže teda platiť iba $b^2-b=2$ a $a^2-a=0$. Odtiaľ $a \in \{0,1\}$ a $b=2$. Riešením úlohy sú teda dve dvojice nezáporných celých čísel: $a=0$, $b=2$ a $a=1$, $b=2$.

Za úplné a správne zdôvodnené riešenie dajte 6 bodov, z toho jeden bod za vhodnú úpravu rovnice. V prípade prvého riešenia strhnite po jednom bode pri vynechaní niektorej zo situácií a), b) a 1 bod, ak riešiteľ nevylúči možnosti c), d).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.