2006/2007
56. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 18. – 21. 3. 2007.*)

1. Na niektoré políčko štvorcovej šachovnice $n \times n$ ($n \geqq 2$) postavíme figúrku a potom ju posúvame striedavo „šikmo“ a „priamo“. „Šikmo“ znamená na políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločný práve jeden bod. „Priamo“ znamená na susedné políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločnú stranu. Určte všetky n, pre ktoré existuje východiskové políčko a taká postupnosť ťahov začínajúca „šikmo“, že figúrka prejde celú šachovnicu a na každom políčku sa ocitne práve raz. (*Peter Novotný*)

2. V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ označme L, M stredy kružníc vpísaných postupne do trojuholníkov BCA, BCD. Ďalej označme R priesečník kolmíc vedených z bodov L a M postupne na priamky AC a BD. Dokážte, že trojuholník LMR je rovnoramenný. (*Pavel Leischner*)

3. Označme $\mathbb{N}$ množinu všetkých prirodzených čísel a uvažujme všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$f\big(xf(y)\big) = yf(x).$$

Určte najmenšiu možnú hodnotu $f(2\,007)$. (*Pavel Calábek*)

4. Množina M obsahuje všetky prirodzené čísla od 1 do 2 007 vrátane a má nasledujúcu vlastnosť: Ak je číslo n prvkom množiny M, ležia v M všetky členy aritmetickej postupnosti s prvým členom n a diferenciou $n+1$. Rozhodnite, či množina M musí obsahovať všetky prirodzené čísla väčšie ako určité číslo m. (*Jaromír Šimša*)

5. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC taký, že $|AC| \neq |BC|$. Vnútri jeho strán BC a AC uvažujme body D a E, pre ktoré je $ABDE$ tetivový štvoruholník. Priesečník jeho uhlopriečok AD a BE označme P. Dokážte, že ak sú priamky CP a AB navzájom kolmé, tak P je priesečníkom výšok trojuholníka ABC. (*Ján Mazák*)

6. Určte všetky usporiadané trojice (x, y, z) navzájom rôznych reálnych čísel, ktoré vyhovujú množinovej rovnici

$$\{x, y, z\} = \left\{\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y}\right\}.$$

(*Jaromír Šimša*)