2005/2006
55. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v piatok 25. novembra 2005.*)

1. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

(*J. Švrček*)

2. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník s navzájom kolmými uhlopriečkami. Označme postupne p, q kolmice z bodov D, C na priamku AB. Ďalej označme X priesečník priamok AC a p a Y priesečník priamok BD a q. Dokážte, že $XYCD$ je kosoštvorec alebo štvorec. (*E. Kováč*)

3. Postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *nenulových* celých čísel má tú vlastnosť, že pre každé $n \geqq 0$ platí $a_{n+1} = a_n - b_n$, kde b_n je číslo, ktoré má rovnaké znamienko ako číslo a_n, ale opačné poradie číslic (zápis čísla b_n môže na rozdiel od zápisu čísla a_n začínať jednou alebo viacerými nulami). Napríklad pre $a_0 = 1\,210$ je $a_1 = 1\,089$, $a_2 = -8\,712$, $a_3 = -6\,534, \ldots$

a) Dokážte, že postupnosť (a_n) je periodická.

b) Zistite, aké najmenšie prirodzené číslo môže byť a_0. (*T. Jurík*)

4. Nájdite všetky kubické mnohočleny $P(x)$, ktoré majú aspoň dva rôzne reálne korene, z ktorých jeden je číslo 7, a ktoré pre každé reálne číslo t spĺňajú podmienku: Ak $P(t) = 0$, tak $P(t+1) = 1$. (*Pavel Novotný*)

5. Dané sú úsečky dĺžok a, b, c, d. Dokážte, že rovnosť $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ platí práve vtedy, keď existujú konvexné štvoruholníky so stranami dĺžok a, b, c, d (pri zvyčajnom označení), pričom uhlopriečky každého takého štvoruholníka zvierajú jeden a ten istý uhol. (*J. Šimša*)

6. Nájdite všetky usporiadané dvojice (x, y) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$x^2 + y^2 = 2005(x - y).$$

(*J. Moravčík*)