**2005/2006**
**55. ročník MO** *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v pondelok 16. januára 2006.*)

**1.** Určte všetky hodnoty celočíselného parametra $a$, pre ktoré má rovnica

$$(x+a)(x+2a)=3a$$

aspoň jeden celočíselný koreň. (*J. Zhouf*)

**2.** V danom trojuholníku $ABC$ označme $D$ ten bod polpriamky $CA$, pre ktorý platí $|CD|=|CB|$. Ďalej označme postupne $E$, $F$ stredy úsečiek $AD$ a $BC$. Dokážte, že $|\measuredangle BAC|=2|\measuredangle CEF|$ práve vtedy, keď $|AB|=|BC|$. (*P. Leischner*)

**3.** Rozhodnite, či nerovnosť

$$a(b+1)+b(c+1)+c(d+1)+d(a+1)\geqq \tfrac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

platí pre všetky také kladné čísla $a$, $b$, $c$, $d$, ktoré spĺňajú podmienku
a) $ab=cd=1$;
b) $ac=bd=1$. (*J. Šimša*)

**4.** Každú z hviezdičiek v zápisoch dvanásťmiestnych čísel $A = {*}88\,888\,888\,888$, $B = {*}11\,111\,111\,111$ nahraďte nejakou číslicou tak, aby výraz $|14A-13B|$ mal čo najmenšiu hodnotu. (*J. Šimša*)

**5.** Kruh so stredom $S$ a polomerom $r$ je rozdelený na štyri časti dvoma tetivami, z ktorých jedna má dĺžku $r$ a druhá má od stredu $S$ vzdialenosť $r/2$. Dokážte, že absolútna hodnota rozdielu obsahov tých dvoch častí, ktoré majú spoločný práve jeden bod a pritom žiadna z nich neobsahuje stred $S$, je rovná jednej šestine obsahu kruhu. (*P. Leischner*)

**6.** Určte najmenšie prirodzené číslo $n$ s nasledujúcou vlastnosťou: Keď zvolíme $n$ rôznych prirodzených čísel menších ako 2 005, sú medzi nimi dve také, že podiel súčtu a rozdielu ich druhých mocnín je väčší ako tri. (*J. Zhouf*)