2005/2006
55. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie C*

(*Termín odovzdania: v pondelok 16. januára 2006.*)

1. a) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 60.
b) Určte všetky prirodzené čísla m, pre ktoré je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 120. (*J. Moravčík*)

2. Kružnice k, ℓ, m sa po dvoch zvonka dotýkajú a všetky tri majú spoločnú dotyčnicu. Polomery kružníc k, ℓ sú 3 cm a 12 cm. Vypočítajte polomer kružnice m. Nájdite všetky riešenia. (*L. Boček*)

3. Určte počet všetkých trojíc navzájom rôznych trojmiestnych prirodzených čísel, ktorých súčet je deliteľný každým z troch sčítaných čísel. (*J. Šimša*)

4. Je dané prirodzené číslo n ($n \geqq 2$) a reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pre ktoré platí

$$x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1.$$

Dokážte, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqq n.$$

(*J. Švrček*)

5. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D pätu výšky z vrcholu C a P, Q zodpovedajúce päty kolmíc vedených bodom D na strany AC a BC. Obsahy trojuholníkov ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupne S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočítajte $S_1 : S_3$, ak $S_1 : S_2 = 2 : 3$ a $S_3 : S_4 = 3 : 8$. (*Pavel Novotný*)

6. Rozhodnite, ktoré z čísel

$$\sqrt{p+\sqrt{q}} + \sqrt{q+\sqrt{p}}, \qquad \sqrt{p+\sqrt{p}} + \sqrt{q+\sqrt{q}}$$

je väčšie, ak p a q sú rôzne kladné čísla. (*J. Moravčík*)