2005/2006
55. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala v utorok 24. januára 2006.*)

1. Nájdite všetky dvojice takých celých čísel a, b, že súčet $a+b$ je koreňom rovnice $x^2+ax+b=0$. (*E. Kováč*)

2. Postupnosť reálnych čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňa pre každé $n \geqq 1$ rovnosť

$$\frac{a_{n+3}-a_{n+2}}{a_n-a_{n+1}}=\frac{a_{n+3}+a_{n+2}}{a_n+a_{n+1}}$$

a naviac platí $a_{11}=4$, $a_{22}=2$, $a_{33}=1$. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k je súčet

$$a_1^k+a_2^k+\dots+a_{100}^k$$

druhou mocninou prirodzeného čísla. (*J. Zhouf*)

3. Daný je trojuholník ABC a vnútri neho bod P. Označme X priesečník priamky AP so stranou BC a Y priesečník priamky BP so stranou AC. Dokážte, že štvoruholník $ABXY$ je tetivový práve vtedy, keď druhý priesečník (rôzny od bodu C) kružníc opísaných trojuholníkom ACX a BCY leží na priamke CP. (*E. Kováč*)

4. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\sin^2 x+\cos^2 y=y^2,$$
$$\sin^2 y+\cos^2 x=x^2.$$

(*J. Švrček*)