

2005/2006
55. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie B

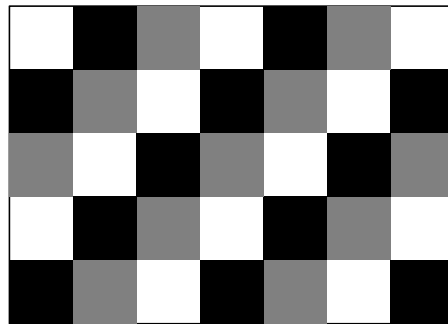
(Súťaž sa konala v utorok 21. marca 2006.)

1. Určte všetky dvojice prvočísel p, q , pre ktoré platí

$$p + q^2 = q + p^3.$$

(J. Švrček)

2. Obdĺžnik $ABCD$ so stranami dĺžok $|AB| = 2008$ a $|BC| = 2006$ je rozdelený na 2008×2006 jednotkových štvorcov a tie sú striedavo ofarbené čiernou, sivou a bielou farbou podobne ako obdĺžnik na obr. 1: štvorce pri vrchoch A a B sú čierne, štvorce pri vrchoch C a D sú biele. Určte obsah tej časti trojuholníka ABC , ktorá je sivá.



Obr. 1

(Pavel Novotný)

3. V lichobežníku $ABCD$, ktorého základňa AB má dvakrát väčšiu dĺžku ako základňa CD , označme E stred ramena BC . Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku CDE prechádza stredom uhlopriečky AC práve vtedy, keď strany AB a BC sú navzájom kolmé.
(P. Leischner)

4. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ platí

$$1 \leq a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq 9.$$

(J. Šimša)