2015/2016
65. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 30. novembra 2015.*)

1. V každej zo štyroch miestností je niekoľko predmetov. Nech $n \geqq 2$ je prirodzené číslo. Jednu n-tinu predmetov z prvej miestnosti prenesieme do druhej miestnosti. Následne jednu n-tinu (z nového počtu) predmetov prenesieme z druhej miestnosti do tretej. Podobne potom z tretej miestnosti do štvrtej a zo štvrtej do prvej. (Vždy pritom prenášame celé predmety.) Ak viete, že na konci bol v každej miestnosti rovnaký počet predmetov, určte, koľko najmenej predmetov mohlo byť na začiatku v druhej miestnosti. Pre ktoré n sa tak môže stať? (*Vojtech Bálint, Michal Rolínek*)

2. Nájdite najmenšie reálne číslo m, pre ktoré možno nájsť reálne čísla a, b tak, aby nerovnosť

$$|x^2 + ax + b| \leqq m$$

platila pre každé $x \in \langle 0, 2 \rangle$. (*Leo Boček*)

3. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB a dlhšou odvesnou BC. Nech D je päta výšky z vrcholu C. Kružnica k so stredom D a polomerom CD pretína odvesnu BC v bode Q a ďalej priamku AB v bodoch E a F ($E \neq F$), pričom F je bodom prepony AB. Úsečka QE pretína odvesnu AC v bode P. Dokážte, že $|PE| = |QF|$. (*Jaroslav Švrček*)

4. Nela s Janou zvolia prirodzené číslo k a následne hrajú hru s tabuľkou majúcou rozmery 9×9. Začínajúca Nela vždy vo svojom ťahu vyberie jedno prázdne políčko a vpíše doňho nulu. Jana vo svojom ťahu do nejakého prázdneho políčka napíše jednotku. Navyše po každom ťahu Nely nasleduje k ťahov Jany. Ak sa kedykoľvek počas hry stane, že súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci je nepárny, vyhrá Jana. Ak dievčatá vyplnia celú tabuľku bez toho, aby sa tak stalo, vyhrá Nela. Nájdite najmenšiu hodnotu k, pre ktorú má Jana vyhrávajúcu stratégiu. (*Michal Rolínek*)

5. Daný je trojuholník ABC s najkratšou stranou BC. Na stranách AB, AC a na polpriamkach opačných k polpriamkam BC, CB zvoľme postupne body X, Y, K, L tak, aby platilo $|BX| = |BK| = |BC| = |CY| = |CL|$. Priamky KX a LY sa pretínajú v bode M. Dokážte, že ťažisko trojuholníka KLM je totožné so stredom kružnice vpísanej do trojuholníka ABC. (*Tomáš Jurík*)

6. Na tabuli je napísaný súčin

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Pre ktoré prirodzené čísla $n \geqq 2$ je možné za niektoré z činiteľov dopísať výkričník a nahradiť ich tak ich faktoriálmi, aby výsledný súčin bol rovný druhej mocnine prirodzeného čísla? (*Michal Rolínek*)