2015/2016
65. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v pondelok 11. januára 2016.*)

1. Pre prirodzené čísla k, l, m platí

$$\frac{k+m+klm}{lm+1} = \frac{2\,051}{404}.$$

Určte všetky možné hodnoty súčinu klm. (*Aleš Kobza*)

2. Do štvorcovej tabuľky 11×11 sme vpísali prirodzené čísla $1, 2, \dots, 121$ postupne po riadkoch zľava doprava a zhora nadol. Štvorcovou doštičkou 4×4 sme všetkými možnými spôsobmi zakryli práve 16 políčok. Koľkokrát bol súčet zakrytých 16 čísel druhou mocninou celého čísla? (*Vojtech Bálint, Tomáš Jurík*)

3. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB a odvesnami dĺžok $|AC| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|BC| = 3\,\mathrm{cm}$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AB a AC, zatiaľ čo k_2 sa dotýka strán AB a BC. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu polomeru r_2. (*Pavel Novotný*)

4. Počet všetkých párnych deliteľov niektorého prirodzeného čísla je o 3 väčší ako počet všetkých jeho nepárnych deliteľov. Aký je podiel súčtu všetkých jeho párnych deliteľov a súčtu všetkých jeho nepárnych deliteľov? Nájdite všetky možné odpovede. (*Erika Novotná*)

5. Vrcholy konvexného šesťuholníka $ABCDEF$ ležia na kružnici, pričom $|AB| = |CD|$. Úsečky AE a CF sa pretínajú v bode G a úsečky BE a DF sa pretínajú v bode H. Dokážte, že úsečky GH, AD a BC sú navzájom rovnobežné. (*Šárka Gergelitsová*)

6. Kladné reálne čísla a, b, c sú také, že hodnoty

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c, \quad x_4 = \frac{2a^2}{b+c}, \quad x_5 = \frac{2b^2}{c+a}, \quad x_6 = \frac{2c^2}{a+b}$$

sú navzájom rôzne. Zapíšme ich od najmenšej po najväčšiu:

$$x_{i_1} < x_{i_2} < x_{i_3} < x_{i_4} < x_{i_5} < x_{i_6}.$$

Zistite, koľko rôznych poradí $(i_1, i_2, \dots, i_6)$ indexov 1 až 6 môžeme dostať, keď budeme rôzne voliť čísla a, b, c. (*Jaromír Šimša*)