2015/2016
65. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie C*

(*Termín odovzdania: v pondelok 11. januára 2016.*)

1. Nájdite všetky možné hodnoty súčinu prvočísel p, q, r, pre ktoré platí

$$p^2 - (q + r)^2 = 637.$$

(*Vojtech Bálint, Jaromír Šimša*)

2. Určte, koľkými spôsobmi možno k jednotlivým vrcholom kocky $ABCDEFGH$ pripísať čísla 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 tak, aby súčin čísel pripísaných ľubovoľným trom vrcholom každej zo stien kocky bol párny. (*Jaroslav Švrček*)

3. Uvažujme výraz

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4.$$

a) Nájdite všetky reálne čísla x a y, pre ktoré daný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu.
b) Určte všetky dvojice celých nezáporných čísel x a y, pre ktoré je hodnota daného výrazu rovná číslu 16.

(*Aleš Kobza*)

4. Vnútri strán AB, AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body E, F, pričom $EF \parallel BC$. Úsečka EF je potom rozdelená bodom D tak, že platí

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

a) Ukážte, že pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD je pre $p = 2 : 3$ rovnaký ako pre $p = 3 : 2$.
b) Zdôvodnite, prečo pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD má hodnotu aspoň 4.

(*Vojtěch Žádník*)

5. Máme kartičky s číslami $5, 6, 7, \ldots, 55$ (na každej kartičke je jedno číslo). Koľko najviac kartičiek môžeme vybrať tak, aby súčet čísel na žiadnych dvoch vybraných kartičkách nebol palindróm? (Palindróm je číslo, ktoré je rovnaké pri čítaní zľava doprava i sprava doľava.) (*Tomáš Jurík*)

6. Daná je kružnica $k_1(A; 4\,\mathrm{cm})$, jej bod B a kružnica $k_2(B; 2\,\mathrm{cm})$. Bod C je stredom úsečky AB a bod K je stredom úsečky AC. Vypočítajte obsah pravouhlého trojuholníka KLM, ktorého vrchol L je jeden z priesečníkov kružníc k_1, k_2 a ktorého prepona KM leží na priamke AB. (*Šárka Gergelitsová*)