

2005/2006

55. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie C

(Súťaž sa konala v utorok 21. marca 2006.)

1. Základňa AB lichobežníka $ABCD$ je trikrát dlhšia ako základňa CD . Označme M stred strany AB a P priesečník úsečky DM s uhlopriečkou AC . Vypočítajte pomer obsahov trojuholníka CDP a štvoruholníka $MBCP$. (Pavel Novotný)

2. Ak reálne čísla a, b, c, d splňajú rovnosti

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1,$$

platí nerovnosť

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leq 3.$$

Dokážte a zistite, kedy za daných podmienok nastane rovnosť.

(J. Švrček)

3. Kružnice k, ℓ s vonkajším dotykom ležia obe v obdĺžniku $ABCD$, ktorého obsah je 72 cm^2 . Kružnica k sa pritom dotýka strán CD, DA a AB , zatiaľ čo kružnica ℓ sa dotýka strán AB a BC . Určte polomery kružníc k a ℓ , ak viete, že polomer kružnice k je v centimetroch vyjadrený celým číslom. (J. Švrček)

4. Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q , pre ktoré platí

$$p + q^2 = q + 145p^2.$$

(J. Moravčík)