2014/2015
64. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov*

(*Súťaž sa konala 17. – 20. 5. 2015.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. V pravouhlom trojuholníku ABC s kratšou odvesnou AC má prepona AB dĺžku 12. Označme T jeho ťažisko a D pätu výšky z vrcholu C. Určte veľkosť jeho vnútorného uhla pri vrchole B, pre ktorú má trojuholník DTC najväčší možný obsah.
(*Ján Mazák*)

I-2. Rozhodnite, či sa dajú každému vrcholu pravidelného 30-uholníka priradiť po jednom čísla $1, 2, \dots, 30$ tak, aby súčet čísel priradených ľubovoľným dvom susedným vrcholom bol druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla. (*Łukasz Bożyk*)

I-3. Pre reálne čísla x, y platí $x^2 + y^2 \leqq 2$. Dokážte, že tieto čísla spĺňajú nerovnosť

$$xy + 3 \geqq 2x + 2y.$$

(*Peter Novotný*)

I-4. Nech E, F sú postupne stredy odvesien BC, AC pravouhlého trojuholníka ABC a D je päta jeho výšky z vrcholu C. Ďalej nech P označuje priesečník osi jeho vnútorného uhla pri vrchole A a priamky EF. Dokážte, že P je stredom kružnice vpísanej trojuholníku CDE. (*Jaroslav Švrček*)

I-5. Určte všetky prirodzené čísla $n > 1$ s vlastnosťou: Pre každé $d > 1$, ktoré je deliteľom čísla n, je $d - 1$ deliteľom $n - 1$. (*Łukasz Bożyk*)

Súťaž družstiev:

T-1. Nech I je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC a M je stred jeho strany BC. Ak platí $|AI| = |MI|$, tak medzi stranami trojuholníka ABC existujú dve, z ktorých jedna má dvojnásobnú dĺžku ako druhá. Dokážte. (*Tomasz Cieśla*)

T-2. Zo šachovnice s rozmermi 8×8 sme odstránili prostredný štvorec s rozmermi 2×2.

a) Koľko najviac dám možno umiestniť na zvyšných 60 políčok tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?
b) Koľko najmenej dám sa dá umiestniť na šachovnicu tak, aby nimi bolo ohrozených všetkých 60 políčok?

(Dáma ohrozuje políčko, na ktorom stojí a tiež každé políčko, na ktoré sa vie dostať jedným ťahom bez toho, aby prešla ponad niektoré zo štyroch odstránených políčok.)
(*Peter Novotný*)

T-3. Różne punkty A i D leżą po tej samej stronie prostej BC, przy czym $|AB| = |BC| = |CD|$ oraz proste AD i BC są prostopadłe. Niech E będzie punktem przecięcia prostych AD i BC. Udowodnij, że

$$\big||BE| - |CE|\big| < |AD|\sqrt{3}.$$

(*Łukasz Bożyk*)

T-4. Wyznacz wszystkie takie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich, że

$$a + b + (D(a, b))^2 = n(a, b) = 2 \cdot n(a - 1, b),$$

gdzie $n(a, b)$ oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność, a $D(a, b)$ – największy wspólny dzielnik liczb a, b. (*Tomáš Jurík*)

T-5. Určete nejmenší reálnou konstantu p, pro kterou platí nerovnost

$$\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} \leqq p\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)$$

s libovolnými kladnými reálnými čísly a, b. (*Jaromír Šimša*)

T-6. Vrcholům krychle připíšeme po jednom čísla $1, 2, 3, \ldots, 8$ a každé její hraně pak přiřadíme součin čísel připsaných jejím dvěma krajním bodům. Určete největší možnou hodnotu součtu čísel přiřazených všem dvanácti hranám krychle. (*Jaromír Šimša*)