2014/2015
64. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 14. – 17. 6. 2015.*)

1. Na kružnici s polomerom r ležia rôzne body A, B, C, D, E v tomto poradí, pričom $|AB| = |CD| = |DE| > r$. Dokážte, že trojuholník, ktorého vrcholy sú ťažiská trojuholníkov ABD, BCD a ADE, je tupouhlý. (*Tomáš Jurík*)

2. Systém množín $\mathcal{F}$ sa nazýva *skvelý*, ak je splnená nasledujúca podmienka: Pre každú trojicu množín $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{F}$ je aspoň jedna z množín

$$(X_1 \setminus X_2) \cap X_3, \qquad (X_2 \setminus X_1) \cap X_3$$

prázdna. Dokážte, že ak $\mathcal{F}$ je skvelý systém pozostávajúci z niektorých podmnožín danej konečnej množiny U, tak $|\mathcal{F}| \leqq |U| + 1$. (*Michał Pilipczuk*)

3. Reálne čísla x, y, z spĺňajú rovnicu

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + x + y + z = 0$$

a žiadne z nich neleží v otvorenom intervale $(-1, 1)$. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu súčtu $x + y + z$. (*Jaromír Šimša*)

4. Podivná kalkulačka má len dve tlačidlá, na každom je napísané dvojciferné prirodzené číslo. Na začiatku je na displeji číslo 1. Vždy, keď stlačíme tlačidlo s číslom N, kalkulačka zmení zobrazené číslo X na číslo $X \cdot N$ alebo $X + N$. Pritom násobenie a sčítanie sa strieda, začína sa násobením. (Napríklad ak na 1. tlačidle je číslo 10 a na 2. tlačidle je číslo 20 a stlačíme postupne 1., 2., 1. a 1. tlačidlo, dostaneme postupne výsledky $1 \cdot 10 = 10$, $10 + 20 = 30$, $30 \cdot 10 = 300$, $300 + 10 = 310$.) Rozhodnite, či existujú konkrétne hodnoty dvojciferných čísel na tlačidlách také, že dokážeme zobraziť nekonečne veľa čísel končiacich štvorčíslím
a) 2015,
b) 5813. (*Michal Rolínek, Peter Novotný*)

5. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, ktorý nie je rovnostranný. Označme O stred jeho opísanej kružnice a H jeho priesečník výšok. Kružnica k prechádza bodom B a dotýka sa priamky AC v bode A. Kružnica l má stred na polpriamke BH a dotýka sa priamky AB v bode A. Kružnice k a l sa pretínajú v bode X ($X \neq A$). Dokážte, že $|\measuredangle HXO| = 180° - |\measuredangle BAC|$. (*Josef Tkadlec*)

6. Nech n je dané párne prirodzené číslo. Na tabuli je napísaných n reálnych čísel. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné dve čísla, zotrieme ich a *každé* z nich nahradíme ich súčinom. Dokážte, že bez ohľadu na to, s akou n-ticou začneme, je možné dostať po konečnom počte krokov na tabuli n rovnakých čísel. (*Peter Novotný*)