2014/2015
64. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 9. – 15. 7. 2015.*)

1. Konečnú množinu $\mathcal{S}$ pozostávajúcu z bodov roviny nazývame *vyvážená*, ak pre ľubovoľné dva rôzne body A, B z množiny $\mathcal{S}$ existuje v $\mathcal{S}$ taký bod C, že $|AC| = |BC|$. Množinu $\mathcal{S}$ nazývame *bezstredová*, ak pre žiadne tri rôzne body A, B, C z množiny $\mathcal{S}$ neexistuje v $\mathcal{S}$ taký bod P, že $|PA| = |PB| = |PC|$.

a) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geqq 3$ existuje vyvážená množina obsahujúca práve n bodov.
b) Určte všetky prirodzené čísla $n \geqq 3$, pre ktoré existuje vyvážená bezstredová množina obsahujúca práve n bodov.

(*Holandsko*)

2. Určte všetky trojice (a, b, c) kladných celých čísel, pre ktoré je každé z čísel

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

mocninou čísla 2. (*Srbsko*)

3. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, pričom $|AB| > |AC|$. Označme Γ jeho opísanú kružnicu, H priesečník výšok a F pätu výšky z vrcholu A. Stred strany BC označme M. Nech Q je taký bod kružnice Γ, že $|\measuredangle HQA| = 90°$. Ďalej nech K je taký bod kružnice Γ, že $|\measuredangle HKQ| = 90°$. Predpokladajme, že body A, B, C, K a Q sú všetky rôzne a ležia na kružnici Γ v tomto poradí. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom KQH a FKM sa navzájom dotýkajú. (*Ukrajina*)

4. Trojuholník ABC má opísanú kružnicu Ω, ktorej stred označme O. Nech kružnica Γ so stredom A pretína úsečku BC v bodoch D a E, pričom body B, D, E, C sú všetky rôzne a ležia na priamke BC v tomto poradí. Kružnice Γ a Ω sa pretínajú v bodoch F a G, pričom body A, F, B, C, G ležia na kružnici Ω v tomto poradí. Označme K ďalší priesečník kružnice opísanej trojuholníku BDF s úsečkou AB. Podobne označme L ďalší priesečník kružnice opísanej trojuholníku CGE s úsečkou CA. Predpokladajme, že priamky FK a GL sú rôzne a pretínajú sa v bode X. Dokážte, že X leží na priamke AO. (*Grécko*)

5. Označme $\mathbb{R}$ množinu všetkých reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

platí pre všetky reálne čísla x, y. (*Albánsko*)

6. Postupnosť $a_1, a_2, \ldots$ celých čísel spĺňa nasledujúce podmienky:

i) $1 \leqq a_j \leqq 2015$ pre všetky $j \geqq 1$;
ii) $k + a_k \neq l + a_l$ pre všetky $1 \leqq k < l$.

Dokážte, že existujú kladné celé čísla b a N také, že nerovnosť

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqq 1007^2$$

platí pre všetky celé čísla m, n spĺňajúce $n > m \geqq N$. (*Austrália*)