

2005/2006

55. ročník MO

Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A

(Súťaž sa konala 26. – 29. 3. 2006.)

1. Postupnosť  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  prirodzených čísel má tú vlastnosť, že pre každé  $n \geq 1$  platí  $a_{n+1} = a_n + b_n$ , pričom  $b_n$  je číslo, ktoré má opačné poradie číslic ako číslo  $a_n$  (zápis čísla  $b_n$  môže na rozdiel od zápisu čísla  $a_n$  začínať jednou alebo viacerými nulami). Napríklad pre  $a_1 = 170$  platí  $a_2 = 241$ ,  $a_3 = 383$ ,  $a_4 = 766$ , ... Rozhodnite, či  $a_7$  môže byť prvočíslo. (Peter Novotný)

2. Nech  $m$  a  $n$  sú také prirodzené čísla, že rovnica

$$(x + m)(x + n) = x + m + n$$

má aspoň jedno celočíselné riešenie. Dokážte, že platí

$$\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 2.$$

(J. Šimša)

3. V trojuholníku  $ABC$ , ktorý nie je rovnostranný, označme  $K$  priesečník osi vnútorného uhla  $BAC$  so stranou  $BC$  a  $L$  priesečník osi vnútorného uhla  $ABC$  so stranou  $AC$ . Ďalej označme  $S$  stred kružnice vpísanej,  $O$  stred kružnice opísanej a  $V$  priesečník výšok v trojuholníku  $ABC$ . Dokážte, že nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivalentné:

- Priamka  $KL$  sa dotýka kružníc opísaných trojuholníkom  $ALS$ ,  $BVS$  a  $BKS$ .
- Body  $A$ ,  $B$ ,  $K$ ,  $L$  a  $O$  ležia na jednej kružnici. (T. Jurík)

4. V rovine je daná úsečka  $AB$ . Zostrojte množinu ťažísk všetkých ostrouhlých trojuholníkov  $ABC$ , pre ktoré platí: Vrcholy  $A$  a  $B$ , priesečník výšok  $V$  a stred  $S$  kružnice vpísanej do trojuholníka  $ABC$  ležia na jednej kružnici. (J. Švrček)

5. Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prvočísel  $p$ ,  $q$ ,  $r$  spĺňajúce nasledujúce podmienky:

$$\begin{aligned} p &| q + r, \\ q &| r + 2p, \\ r &| p + 3q. \end{aligned}$$

(M. Panák)

6. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{cotg}^2 2y &= 1, \\ \operatorname{tg}^2 y + 2 \operatorname{cotg}^2 2z &= 1, \\ \operatorname{tg}^2 z + 2 \operatorname{cotg}^2 2x &= 1. \end{aligned}$$

(J. Švrček, P. Calábek)