2004/2005
54. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v piatok 26. novembra 2004.*)

1. Neprázdnu podmnožinu prirodzených čísel nazveme *malou*, keď má menej prvkov, ako je jej najmenší prvok. Určte počet všetkých tých malých množín M, ktoré sú podmnožinami množiny $\{1, 2, 3, \dots , 100\}$ a majú nasledovnú vlastnosť: ak do M patria dve rôzne čísla x a y, potom do M patrí aj číslo $|x - y|$. (*J. Földes*)

2. Nech M je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme P, R priesečníky priamky AM postupne s úsečkami BD, CD a podobne Q, S priesečníky priamky BM s úsečkami AC, DC. Dokážte, že priamky PS a QR sú navzájom kolmé. (*J. Švrček*)

3. Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Uvažujme dvojice (a, b) celých čísel, pre ktoré majú kvadratické rovnice

$$x^2 - 2ax + b = 0, \qquad y^2 + 2ay + b = 0$$

reálne korene (nie nutne rôzne), ktoré možno označiť $x_{1,2}$ resp. $y_{1,2}$ v takom poradí, že platí rovnosť $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$.

a) Pre dané k určte najväčšiu možnú hodnotu b zo všetkých takých dvojíc (a, b).
b) Pre $k = 2\,004$ určte počet všetkých takých dvojíc (a, b).
c) Pre dané k vypočítajte súčet čísel b zo všetkých takých dvojíc (a, b), pričom každé číslo b sa pripočíta toľkokrát, v koľkých dvojiciach (a, b) vystupuje.

(*E. Kováč*)

4. Dané aritmetické postupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ majú rovnaký prvý člen a nasledovnú vlastnosť: existuje index k ($k > 1$), pre ktorý platia rovnosti

$$x_k^2 - y_k^2 = 53, \quad x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78, \quad x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27.$$

Nájdite všetky také indexy k. (*V. Bálint*)

5. V lichobežníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, platí $|AB| = 2|CD|$. Označme E stred ramena BC. Dokážte, že rovnosť $|AB| = |BC|$ platí práve vtedy, keď štvoruholník $AECD$ je dotyčnicový. (*R. Horenský*)

6. Nájdite všetky funkcie $f : \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$, ktoré spĺňajú zároveň tri nasledovné podmienky:

a) Pre ľubovoľné nezáporné čísla x, y také, že $x + y > 0$, platí rovnosť

$$f\big(xf(y)\big)f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right);$$

b) $f(1) = 0$;
c) $f(x) > 0$ pre ľubovoľné $x > 1$. (*P. Calábek*)