2004/2005
54. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v piatok 14. januára 2005.*)

1. Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc

$$x^2 + ax + b = 0, \qquad x^2 + (2a + 1)x + 2b + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom korene druhej rovnice sú prevrátenými hodnotami koreňov prvej rovnice. (*E. Kováč*)

2. Daný je rovnobežník $ABCD$. Priamka vedená bodom D pretína úsečku AC v bode G, úsečku BC v bode F a polpriamku AB v bode E tak, že trojuholníky BEF a CGF majú rovnaký obsah. Určte pomer $|AG| : |GC|$. (*T. Jurík*)

3. Na stole leží k hromádok o 1, 2, 3, …, k kameňoch, kde $k \geqq 3$. V každom kroku vyberieme tri ľubovoľné hromádky na stole, zlúčime ich do jednej a pridáme k nej jeden kameň, ktorý dovtedy na stole nebol. Dokážte, že ak po niekoľkých krokoch vznikne jediná hromádka, potom výsledný počet kameňov nie je deliteľný tromi. (*J. Zhouf*)

4. Označme V priesečník výšok a S stred kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý nie je rovnostranný. Dokážte, že ak uhol pri vrchole C má $60°$, potom os uhla ACB je osou úsečky VS. (*J. Zhouf*)

5. V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5\lfloor x \rfloor - 7}{7\lfloor x \rfloor - 5},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x (tzv. *dolná celá časť* reálneho čísla x). (*J. Šimša*)

6. Do kružnice k s polomerom r sú vpísané dve kružnice k_1, k_2 s polomerom $r/2$, ktoré sa vzájomne dotýkajú. Kružnica ℓ sa zvonka dotýka kružníc k_1, k_2 a s kružnicou k má vnútorný dotyk. Kružnica m má vonkajší dotyk s kružnicami k_2 a ℓ a vnútorný dotyk s kružnicou k. Vypočítajte polomery kružníc ℓ a m. (*L. Boček*)