

2004/2005

54. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie C

(Termín odovzdania: v piatok 14. januára 2005.)

1. Nech  $a, b, c, d$  sú také reálne čísla, že  $a + d = b + c$ . Dokážte nerovnosť

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) \geq 0.$$

(E. Kováč)

2. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla  $n \geq 2$  je možné z množiny  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$  vybrať navzájom rôzne párne čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom  $n$ . (J. Zhouf)

3. V ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku  $ABCD$  označme  $E$  stred strany  $BC$  a  $F$  stred strany  $AD$ . Dokážte, že trojuholníky  $AED$  a  $BFC$  majú rovnaký obsah práve vtedy, keď sú strany  $AB$  a  $CD$  rovnobežné. (J. Šimša)

4. Tri štvormiestne čísla  $k, \ell, m$  majú rovnaký tvar  $ABAB$ , t.j. číslica na mieste jednotiek je rovnaká ako číslica na mieste stoviek a číslica na mieste desiatok je rovnaká ako číslica na mieste tisícok. Číslo  $\ell$  má číslicu na mieste jednotiek o 2 väčšiu a číslicu na mieste desiatok o 1 menšiu ako číslo  $k$ . Číslo  $m$  je súčtom čísel  $k$  a  $\ell$  a je deliteľné deviatimi. Určte všetky také čísla  $k$ . (T. Joska)

5. Určte počet všetkých trojíc dvojmiestnych prirodzených čísel  $a, b, c$ , ktorých súčin  $abc$  má zápis, v ktorom sú všetky číslice rovnaké. Trojice líšiace sa len poradím čísel považujeme za rovnaké, t.j. započítavame ich len raz. (J. Šimša)

6. V trojuholníku  $ABC$  so stranou  $BC$  dĺžky 2 cm je bod  $K$  stredom strany  $AB$ . Body  $L$  a  $M$  rozdeľujú stranu  $AC$  na tri zhodné úsečky. Trojuholník  $KLM$  je rovnoramenný a pravouhlý. Určte dĺžky strán  $AB, AC$  všetkých takých trojuholníkov  $ABC$ .

(P. Leischner)