SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

65. ročník, školský rok 2015/2016

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 65. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **30. novembra 2015** (kategória **A**) a do **11. januára 2016** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2016 v Hongkongu), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2016 v ČR) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v auguste 2016 v Rakúsku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2016 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 65. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	08. 12. 2015	12. 01. 2016	3. – 6. apríla 2016
Kategórie B, C	21. 01. 2016	12. 04. 2016	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2015/2016
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

V každej zo štyroch miestností je niekoľko predmetov. Nech $n \geqq 2$ je prirodzené číslo. Jednu n-tinu predmetov z prvej miestnosti prenesieme do druhej miestnosti. Následne jednu n-tinu (z nového počtu) predmetov prenesieme z druhej miestnosti do tretej. Podobne potom z tretej miestnosti do štvrtej a zo štvrtej do prvej. (Vždy pritom prenášame celé predmety.) Ak viete, že na konci bol v každej miestnosti rovnaký počet predmetov, určte, koľko najmenej predmetov mohlo byť na začiatku v druhej miestnosti. Pre ktoré n sa tak môže stať?

(*Vojtech Bálint, Michal Rolínek*)

A – I – 2

Nájdite najmenšie reálne číslo m, pre ktoré možno nájsť reálne čísla a, b tak, aby nerovnosť

$$|x^2 + ax + b| \leqq m$$

platila pre každé $x \in \langle 0, 2\rangle$. (*Leo Boček*)

A – I – 3

Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB a dlhšou odvesnou BC. Nech D je päta výšky z vrcholu C. Kružnica k so stredom D a polomerom CD pretína odvesnu BC v bode Q a ďalej priamku AB v bodoch E a F ($E \neq F$), pričom F je bodom prepony AB. Úsečka QE pretína odvesnu AC v bode P. Dokážte, že $|PE| = |QF|$. (*Jaroslav Švrček*)

A – I – 4

Nela s Janou zvolia prirodzené číslo k a následne hrajú hru s tabuľkou majúcou rozmery 9×9. Začínajúca Nela vždy vo svojom ťahu vyberie jedno prázdne políčko a vpíše doňho nulu. Jana vo svojom ťahu do nejakého prázdneho políčka napíše jednotku. Navyše po každom ťahu Nely nasleduje k ťahov Jany. Ak sa kedykoľvek počas hry stane, že súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci je nepárny, vyhrá Jana. Ak dievčatá vyplnia celú tabuľku bez toho, aby sa tak stalo, vyhrá Nela. Nájdite najmenšiu hodnotu k, pre ktorú má Jana vyhrávajúcu stratégiu.

(*Michal Rolínek*)

A – I – 5

Daný je trojuholník ABC s najkratšou stranou BC. Na stranách AB, AC a na polpriamkach opačných k polpriamkam BC, CB zvoľme postupne body X, Y, K, L tak, aby platilo $|BX| = |BK| = |BC| = |CY| = |CL|$. Priamky KX a LY sa pretínajú v bode M. Dokážte, že ťažisko trojuholníka KLM je totožné so stredom kružnice vpísanej do trojuholníka ABC.

(*Tomáš Jurík*)

A – I – 6

Na tabuli je napísaný súčin

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Pre ktoré prirodzené čísla $n \geqq 2$ je možné za niektoré z činiteľov dopísať výkričník a nahradiť ich tak ich faktoriálmi, aby výsledný súčin bol rovný druhej mocnine prirodzeného čísla?

(*Michal Rolínek*)

****

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Pre prirodzené čísla k, l, m platí

$$\frac{k+m+klm}{lm+1} = \frac{2\,051}{404}.$$

Určte všetky možné hodnoty súčinu klm. (*Aleš Kobza*)

B – I – 2

Do štvorcovej tabuľky 11×11 sme vpísali prirodzené čísla $1, 2, \ldots, 121$ postupne po riadkoch zľava doprava a zhora nadol. Štvorcovou doštičkou 4×4 sme všetkými možnými spôsobmi zakryli práve 16 políčok. Koľkokrát bol súčet zakrytých 16 čísel druhou mocninou celého čísla? (*Vojtech Bálint, Tomáš Jurík*)

B – I – 3

V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB a odvesnami dĺžok $|AC| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|BC| = 3\,\mathrm{cm}$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AB a AC, zatiaľ čo k_2 sa dotýka strán AB a BC. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu polomeru r_2. (*Pavel Novotný*)

B – I – 4

Počet všetkých párnych deliteľov niektorého prirodzeného čísla je o 3 väčší ako počet všetkých jeho nepárnych deliteľov. Aký je podiel súčtu všetkých jeho párnych deliteľov a súčtu všetkých jeho nepárnych deliteľov? Nájdite všetky možné odpovede. (*Erika Novotná*)

B – I – 5

Vrcholy konvexného šesťuholníka $ABCDEF$ ležia na kružnici, pričom $|AB| = |CD|$. Úsečky AE a CF sa pretínajú v bode G a úsečky BE a DF sa pretínajú v bode H. Dokážte, že úsečky GH, AD a BC sú navzájom rovnobežné. (*Šárka Gergelitsová*)

B – I – 6

Kladné reálne čísla a, b, c sú také, že hodnoty

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c, \quad x_4 = \frac{2a^2}{b+c}, \quad x_5 = \frac{2b^2}{c+a}, \quad x_6 = \frac{2c^2}{a+b}$$

sú navzájom rôzne. Zapíšme ich od najmenšej po najväčšiu:

$$x_{i_1} < x_{i_2} < x_{i_3} < x_{i_4} < x_{i_5} < x_{i_6}.$$

Zistite, koľko rôznych poradí $(i_1, i_2, \ldots, i_6)$ indexov 1 až 6 môžeme dostať, keď budeme rôzne voliť čísla a, b, c. (*Jaromír Šimša*)

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Nájdite všetky možné hodnoty súčinu prvočísel p, q, r, pre ktoré platí

$$p^2 - (q+r)^2 = 637.$$

(*Vojtech Bálint, Jaromír Šimša*)

C – I – 2

Určte, koľkými spôsobmi možno k jednotlivým vrcholom kocky $ABCDEFGH$ pripísať čísla 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 tak, aby súčin čísel pripísaných ľubovoľným trom vrcholom každej zo stien kocky bol párny. (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 3

Uvažujme výraz

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4.$$

a) Nájdite všetky reálne čísla x a y, pre ktoré daný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu.

b) Určte všetky dvojice celých nezáporných čísel x a y, pre ktoré je hodnota daného výrazu rovná číslu 16.

(*Aleš Kobza*)

C – I – 4

Vnútri strán AB, AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body E, F, pričom $EF \parallel BC$. Úsečka EF je potom rozdelená bodom D tak, že platí

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

a) Ukážte, že pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD je pre $p = 2 : 3$ rovnaký ako pre $p = 3 : 2$.

b) Zdôvodnite, prečo pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD má hodnotu aspoň 4.

(*Vojtěch Žádník*)

C – I – 5

Máme kartičky s číslami $5, 6, 7, \dots, 55$ (na každej kartičke je jedno číslo). Koľko najviac kartičiek môžeme vybrať tak, aby súčet čísel na žiadnych dvoch vybraných kartičkách nebol palindróm? (Palindróm je číslo, ktoré je rovnaké pri čítaní zľava doprava i sprava doľava.) (*Tomáš Jurík*)

C – I – 6

Daná je kružnica $k_1(A; 4\,\mathrm{cm})$, jej bod B a kružnica $k_2(B; 2\,\mathrm{cm})$. Bod C je stredom úsečky AB a bod K je stredom úsečky AC. Vypočítajte obsah pravouhlého trojuholníka KLM, ktorého vrchol L je jeden z priesečníkov kružníc k_1, k_2 a ktorého prepona KM leží na priamke AB. (*Šárka Gergelitsová*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

65. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	RNDr. Vojtech Bálint, CSc., doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Šárka Gergelitsová, PhD., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Aleš Kobza, PhD., Mgr. Erika Novotná, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Mgr. Michal Rolínek, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Mgr. Vojtěch Žádník, PhD.
Recenzenti:	doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.,
Redakčná úprava:	RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015