SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

65. ročník, školský rok 2015/2016

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh (maďarská verzia)

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 65. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **30. novembra 2015** (kategória **A**) a do **11. januára 2016** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2016 v Hongkongu), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2016 v ČR) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v auguste 2016 v Rakúsku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2016 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 65. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	08. 12. 2015	12. 01. 2016	3. – 6. apríla 2016
Kategórie B, C	21. 01. 2016	12. 04. 2016	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2015/2016
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

MATEMATIKA OLIMPIA

65-ik évfolyam 2015/2016-es tanév Házi forduló

****

A KATEGÓRIA

A – I – 1

Négy helyiség mindegyikében néhány tárgy van elhelyezve. Legyen $n \geqq 2$ egy természetes szám. Az első helyiségben levő tárgyak n-ed részét átvisszük a második helyiségbe. Ezután a második helyiségben levő tárgyak n-ed részét (az új mennyiségből) visszük át a harmadik helyiségbe. Majd hasonlóan a harmadik helyiségből a negyedikbe, végül a negyedikből az elsőbe. (Minden esetben csak egész számú tárgyat viszünk át.) Határozzátok meg, hogy legalább hány tárgy volt eredetileg a második helyiségben, ha tudjuk, hogy a végén minden helyiségben egyforma számú tárgy volt! Az n szám mely értékeire fordulhat ez elő? (*Vojtech Bálint, Michal Rolínek*)

A – I – 2

Keressétek meg azt a legkisebb valós m számot, amelyre található két valós a, b szám úgy, hogy az

$$|x^2 + ax + b| \leqq m$$

egyenlőtlenség fennáll minden $x \in \langle 0, 2 \rangle$ esetére! (*Leo Boček*)

A – I – 3

Adott a derékszögű ABC háromszög, melyben AB az átfogó és BC a hosszabb befogó. Jelölje D a C pontból húzott magasság talppontját. A D középpontú CD sugarú k körvonal a BC befogót a Q pontban, az AB egyenest az E és F ($E \neq F$) pontokban metszi, ahol F az AB átfogó egy pontja. A QE szakasz az AC befogót a P pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy $|PE| = |QF|$. (*Jaroslav Švrček*)

A – I – 4

Nelli és Janka kiválasztanak egy természetes k számot majd egy 9×9-es táblán a következő játékot játsszák. Nelli a kezdő, és mindig amikor ő van soron kiválaszt egy üres mezőt majd egy nullát ír bele. Amikor Janka van soron, akkor ő választ ki egy üres mezőt és ír bele egy egyest. Nelli minden egyes lépése után Jankának k lépése következik. Ha bármikor a játék közben előfordul az, hogy minden egyes sorban és oszlopban a beírt számok összege páratlan, akkor Janka a győztes. Ha a lányok kitöltik a táblát anélkül, hogy ez előfordulna, akkor Nelli a győztes. Határozzátok meg azt a legkisebb k számot, amelyre Jankának van nyerő stratégiája! (*Michal Rolínek*)

A – I – 5

Adott az ABC háromszög, melynek BC a legrövidebb oldala. Az AB és AC oldalakon, valamint BC és CB-vel ellentétes félegyeneseken vegyük fel rendre az X, Y, K és L pontokat úgy, hogy fennálljon: $|BX| = |BK| = |BC| = |CY| = |CL|$. A KX és LY egyenesek az M pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy a KLM háromszög súlypontja egybeesik az ABC háromszög beírt körének középpontjával! (*Tomáš Jurík*)

A – I – 6

Egy táblára fel van írva az

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

szorzat. Határozzátok meg, hogy mely természetes $n \geqq 2$ számok esetében lehetséges néhány tényező mögé felkiáltójelet írni, s ezzel a tényezőt a faktoriálisával helyettesíteni, úgy, hogy a keletkezett szorzat négyzetszám legyen! (*Michal Rolínek*)

****

B KATEGÓRIA

B – I – 1

A természetes k, l, m számokra fennáll:

$$\frac{k+m+klm}{lm+1} = \frac{2\,051}{404}.$$

Határozzátok meg a klm szorzat összes lehetséges értékét! (*Aleš Kobza*)

B – I – 2

Egy 11×11-es négyzetes táblázatba rendre soronként balról jobbra és fennről lefelé beírtuk az $1, 2, \ldots, 121$ számok mindegyikét. Egy 4×4-es négyzet alakú deszkával az összes lehetséges módon rendre letakartunk 16 mezőt. Hányszor fordult elő az, hogy a letakart számok összege négyzetszám volt? (*Vojtech Bálint, Tomáš Jurík*)

B – I – 3

Az AB átfogójú, $|AC| = 4\,\text{cm}$ és $|BC| = 3\,\text{cm}$ befogójú ABC derékszögű háromszög belsejében két egymást érintő $k_1(S_1; r_1)$ és $k_2(S_2; r_2)$ kör fekszik úgy, hogy k_1 az AB és AC, k_2 pedig az AB és BC oldalakat érinti. Határozzátok meg az r_2 sugár lehető legnagyobb és legkisebb értékét! (*Pavel Novotný*)

B – I – 4

Egy természetes szám összes páros osztójának száma hárommal nagyobb, mint az összes páratlan osztójának száma. Mekkora az összes páros osztó összegének és az összes páratlan osztó összegének hányadosa? Keressétek meg az összes lehetséges választ! (*Erika Novotná*)

B – I – 5

Az $ABCDEF$ konvex hatszög csúcsai egy körvonalra illeszkednek és $|AB| = |CD|$. Az AE és CF szakaszok egymást a G pontban, a BE és DF szakaszok egymást a H pontban metszik. Bizonyítsátok be, hogy a GH, AD és BC szakaszok párhuzamosak! (*Šárka Gergelitsová*)

B – I – 6

Az a, b, c pozitív valós számokra érvényes, hogy az

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c, \quad x_4 = \frac{2a^2}{b+c}, \quad x_5 = \frac{2b^2}{c+a}, \quad x_6 = \frac{2c^2}{a+b}$$

értékek mind különbözőek. Írjuk fel őket a legkisebbtől a legnagyobbig:

$$x_{i_1} < x_{i_2} < x_{i_3} < x_{i_4} < x_{i_5} < x_{i_6}.$$

Határozzátok meg, hogy 1-től 6-ig az indexeket hány különböző $(i_1, i_2, \ldots, i_6)$ sorrendben kaphatjuk így meg az a, b, c számok értékeinek megválasztásától függően! (*Jaromír Šimša*)

C KATEGÓRIA

C – I – 1

Keressétek meg azon p, q, r prímszámok szorzatának összes lehetséges értékét, amelyekre fennáll:

$$p^2 - (q + r)^2 = 637.$$

(*Vojtech Bálint, Jaromír Šimša*)

C – I – 2

Határozzátok meg, hogy hányféleképpen lehet az $ABCDEFGH$ kocka csúcsaihoz hozzáírni az 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 számokat úgy, hogy a kocka bármely oldallapján tetszőlegesen kiválasztott 3 csúcson a számok szorzata páros legyen! (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 3

Tekintsük a

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4$$

kifejezést.

a) Keressétek meg az összes x és y valós számot, amelyre az adott kifejezés felveszi a legkisebb értékét!

b) Keressétek meg az összes x, y nemnegatív egész számpárt, amelyre az adott kifejezés értéke egyenlő 16-tal!

(*Aleš Kobza*)

C – I – 4

Az ABC háromszög AB és AC oldalán rendre felvettük az E és F belső pontokat úgy, hogy $EF \parallel BC$. Az EF szakaszon a D pont úgy helyezkedik el, hogy

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

a) Mutassátok meg, hogy az ABC és ABD háromszögek területeinek aránya egyforma a $p = 2 : 3$ és a $p = 3 : 2$ esetekben!

b) Indokoljátok meg, hogy miért legalább 4 az ABC és ABD háromszögek területeinek aránya!

(*Vojtěch Žádník*)

C – I – 5

Adottak a kártyák, amelyek az $5, 6, 7, \ldots, 55$ számokat tartalmazzák (mindegyik pontosan egyet). Legfeljebb hány kártyát választhatunk ki közülük úgy, hogy a kiválasztott kártyákon szereplő számok közül semmelyik kettő összege se legyen pallindrom? (Pallindrom az a szám, amelyik elölről és hátulról olvasva is ugyanaz.) (*Tomáš Jurík*)

C – I – 6

Adott a $k_1(A; 4\,\text{cm})$ körvonal s rajta a B pont, valamint a $k_2(B; 2\,\text{cm})$ körvonal. Jelölje C az AB szakasz középpontját, K pedig az AC szakasz középpontját. Számítsátok ki a derékszögű KLM háromszög területét, amelyben az L csúcs a k_1 és k_2 körvonalak egyik metszéspontja, a KM átfogó pedig az AB egyenesen fekszik. (*Šárka Gergelitsová*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

65. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	RNDr. Vojtech Bálint, CSc., doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Šárka Gergelitsová, PhD., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Aleš Kobza, PhD., Mgr. Erika Novotná, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Mgr. Michal Rolínek, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Mgr. Vojtěch Žádník, PhD.
Recenzenti:	doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.,
Redakčná úprava:	RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Preklad:	Mgr. Štefan Gyürki, PhD., doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015