

2004/2005

54. ročník MO

Zadania úloh školského kola kategórie B

(Súťaž sa konala v utorok 25. januára 2005.)

1. Na stole leží 54 kôpok s 1, 2, 3, ..., 54 kameňmi. V každom kroku vyberieme ľubovoľnú kôpku, povedzme s  $k$  kameňmi, a odoberieme ju celú zo stola spolu s  $k$  kameňmi z každej tej kôpky, v ktorej je aspoň  $k$  kameňov. Napríklad po prvom kroku, v ktorom vyberieme kôpku s 52 kameňmi, zostanú na stole kôpky s 1, 2, 3, ..., 51, 1 a 2 kameňmi. Predpokladajme, že po určitom počte krokov zostane na stole jediná kôpka. Zdôvodnite, koľko kameňov v nej môže byť. (J. Šimša)

2. Nech  $ABC$  je pravouhlý trojuholník so stranami  $a < b < c$ . Označme  $Q$  stred odvesny  $BC$  a  $S$  stred prepony  $AB$ . Priesečník osi úsečky  $AB$  s odvesnou  $CA$  označme  $R$ . Dokážte, že  $|RQ| = |RS|$  práve vtedy, keď

$$a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3.$$

(J. Švrček)

3. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = \frac{\lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor},$$

kde  $\lfloor a \rfloor$  označuje najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje číslo  $a$ .

(J. Šimša)