

2004/2005

54. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie A

(Súťaž sa konala v utorok 18. januára 2005.)

1. Ak je súčin kladných reálnych čísel a , b , c rovný 1, platí nerovnosť

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Dokážte a zistite, kedy nastáva rovnosť.

(J. Šimša)

2. V obore celých čísel riešte sústavu rovníc

$$x(y+z+1) = y^2 + z^2 - 5,$$

$$y(z+x+1) = z^2 + x^2 - 5,$$

$$z(x+y+1) = x^2 + y^2 - 5.$$

(J. Šimša)

3. V rovine je daný rovnoramenný trojuholník KLM so základňou KL . Uvažujme ľubovoľné dve kružnice k a ℓ , ktoré majú vonkajší dotyk a ktoré sa dotýkajú priamok KM a LM postupne v bodoch K a L . Určte množinu dotykových bodov T všetkých takých kružníc k a ℓ .

(J. Švrček)

4. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel, ktorých súčet má poslednú číslicu 3, rozdiel je prvočíslo a súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla.

(J. Földes)