2004/2005
54. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 3. – 6. 4. 2005.*)

1. Uvažujme ľubovoľné aritmetické postupnosti reálnych čísel $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$, ktoré majú rovnaký prvý člen a spĺňajú pre niektoré $k > 1$ rovnosti

$$x_{k-1}y_{k-1} = 42, \quad x_k y_k = 30 \quad \text{a} \quad x_{k+1}y_{k+1} = 16.$$

Nájdite všetky také postupnosti, pre ktoré je index k najväčší možný. (*J. Šimša*)

2. Zistite, pre ktoré m existuje práve 2^{15} podmnožín X množiny $\{1, 2, 3, \dots, 47\}$ s vlastnosťou: Číslo m je najmenší prvok množiny X a pre každé $x \in \mathsf{X}$ platí buď $x + m \in \mathsf{X}$, alebo $x + m > 47$. (*R. Kučera*)

3. V lichobežníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) označme E stred ramena BC. Ak sú oba štvoruholníky $ABED$ a $AECD$ dotyčnicové, spĺňajú dĺžky strán lichobežníka $ABCD$ označené zvyčajným spôsobom rovnosti

$$a + c = \frac{b}{3} + d \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

Dokážte. (*R. Horenský*)

4. V rovine je daný ostrouhlý trojuholník AKL. Uvažujme ľubovoľný pravouholník $ABCD$, ktorý je trojuholníku AKL opísaný tak, že bod K leží na strane BC a bod L leží na strane CD. Určte množinu priesečníkov S uhlopriečok AC, BD všetkých takých pravouholníkov $ABCD$. (*J. Šimša*)

5. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla p, q, r, s za podmienok $q \neq -1$ a $s \neq -1$ platí: Kvadratické rovnice

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x^2 + rx + s = 0$$

majú v obore reálnych čísel spoločný koreň a ich ďalšie korene sú navzájom prevrátené čísla práve vtedy, keď koeficienty p, q, r, s spĺňajú rovnosti

$$pr = (q + 1)(s + 1) \quad \text{a} \quad p(q + 1)s = r(s + 1)q.$$

(Dvojnásobný koreň kvadratickej rovnice počítame dvakrát.) (*J. Šimša*)

6. Rozhodnite, či pre každé poradie čísel $1, 2, 3, \dots, 15$ možno tieto čísla zapísať najviac štyrmi rôznymi farbami tak, aby všetky čísla rovnakej farby tvorili v danom poradí monotónnu (t. j. rastúcu alebo klesajúcu) postupnosť. (Jednočlenná postupnosť je monotónna.) (*J. Šimša*)