2003/2004

53. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v stredu 26. novembra 2003.*)

1. Určte všetky dvojice (p, q) reálnych čísel také, že rovnica $x^2 + px + q = 0$ má riešenie v obore reálnych čísel, pričom platí: Ak t je koreňom tejto rovnice, potom aj $|2t - 15|$ je jej koreňom. (*P. Černek*)

2. V rovine daného štvorca $KLMN$ určte množinu všetkých bodov P, pre ktoré sú uhly NPK, KPL a LPM zhodné. (*J. Švrček*)

3. Pre ľubovoľné prirodzené číslo k zostavme z písmen A, B všetky možná „slová“ dĺžky k. Rozdeľme ich do dvoch skupín P_k a N_k podľa toho, či je v danom slove párny alebo nepárny počet „slabík“ BA (za párny považujeme aj počet 0). Napríklad slová $\underline{BA}BBB\underline{BA}$ a $AAAAAAB$ patria do skupiny P_7, slová $AAB\underline{BA}BB$ a $\underline{BA}\,\underline{BA}A\underline{BA}$ patria do skupiny N_7. Zistite, pre ktoré k majú skupiny P_k a N_k rovnaký počet prvkov. (*J. Šimša*)

4. Určte najmenšie reálne číslo p také, že nerovnosť

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1} \leqq \frac{1}{2}n(n+p)$$

platí pre každé prirodzené číslo n. (*S. Trávníček*)

5. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník, ktorého vnútorný uhol pri vrchole B má veľkosť $60°$.

a) Ak $|BC| = |CD|$, potom platí $|CD| + |DA| = |AB|$; dokážte.

b) Rozhodnite, či platí opačná implikácia. (*E. Kováč*)

6. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$x^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad y^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}, \quad z^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

(*J. Šimša*)