

2003/2004

53. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

(Termín odovzdania: v utorok 13. januára 2004.)

1. Každú z hviezdíčiek na mieste jednotiek vo výraze

$$\left| \frac{777\,777\,777\,77*}{777\,777\,777\,77*} - \frac{555\,555\,555\,554}{555\,555\,555\,559} \right|$$

nahradte nejakou číslicou tak, aby výraz mal čo najmenšiu hodnotu. (J. Šimša)

2. V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\angle DAB| = |\angle ABC| = 36^\circ$. Na základni AB je daný bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom AKD a KBC majú vonkajší dotyk. (J. Zhouf)

3. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$x[x] - 5x + 7 = 0,$$

kde $[x]$ znamená dolnú celú časť čísla x , teda najväčšie celé číslo k , pre ktoré platí $k \leq x$. (Napríklad $[\sqrt{2}] = 1$ a $[-3,1] = -4$.) (E. Kováč)

4. Číslo a_n vznikne tak, že za seba napíšeme prvých n po sebe idúcich prirodzených čísel, napríklad $a_{13} = 12\,345\,678\,910\,111\,213$. Zistite, koľko čísel deliteľných 24 sa nachádza medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_{10\,000}$. (P. Černek)

5. Je daná priamka p a bod A , ktorý na nej neleží. Zostrojte lichobežník $ABCD$ s minimálnym obsahom a ramenom BC na priamke p tak, aby boli splnené rovnosti $|BC| = |AC|$ a $|BE| = 3|DE|$, kde E je priesečník uhlopriečok lichobežníka. (P. Leischner)

6. Určte všetky prirodzené čísla M deliteľné 240, pre ktoré má rovnica $M = \text{NSN}(x, y)$ s neznámymi x, y práve 1001 riešení v obore prirodzených čísel. (Symbol $\text{NSN}(x, y)$ značí najmenší spoločný násobok čísel x a y .) (P. Černek)