2003/2004
53. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie C*

(*Termín odovzdania: v utorok 13. januára 2004.*)

1. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n, ktoré je väčšie ako 3 a nie je deliteľné tromi, platí: Šachovnicu $n \times n$ je možné rozrezať na jeden štvorec 1×1 a obdĺžniky 3×1. (*J. Zhouf*)

2. Daný je obdĺžnik $ABCD$. Nech priamky p a q, ktoré prechádzajú vrcholom A, pretínajú polkružnice zvonku pripísané stranám BC a CD v bodoch K a L ($B \neq K \neq \neq C \neq L \neq D$) a taktiež strany BC a CD v bodoch P a Q tak, že trojuholník ABP má taký istý obsah ako trojuholník KCP a súčasne trojuholník AQD má taký istý obsah ako trojuholník CLQ. Dokážte, že body K, L, C ležia na jednej priamke. (*J. Švrček*)

3. Žiak mal vypočítať príklad $X \cdot Y : Z$, kde X je dvojciferné číslo, Y trojciferné číslo a Z trojciferné číslo s číslicou 2 na mieste jednotiek. Výsledkom príkladu malo byť prirodzené číslo. Žiak ale prehliadol bodku a súčin $X \cdot Y$ chápal ako päťciferné číslo. Dostal tak sedemkrát väčší výsledok ako mal vyjsť. Aký príklad mal žiak počítať? (*P. Černek*)

4. Nech P je ľubovoľný vnútorný bod rovnostranného trojuholníka ABC. Uvažujme obrazy K, L a M bodu P v osových súmernostiach s osami AB, BC a CA. Určte množinu všetkých bodov P takých, že trojuholník KLM je rovnoramenný. (*J. Zhouf*)

5. Prirodzené číslo nazveme *magickým* práve vtedy, keď sa dá rozložiť na súčet dvoch trojmiestnych čísel zapísaných rovnakými číslicami, ale v opačnom poradí. Napríklad číslo 1 413 je magické, lebo $1\,413 = 756 + 657$; najmenšie magické číslo je 202.

a) Určte počet všetkých magických čísel.
b) Ukážte, že súčet všetkých magických čísel je 187 000. (*J. Šimša*)

6. Zo všetkých štvoruholníkov, ktoré sa dajú vpísať do danej kružnice s polomerom r a ktoré majú dve strany danej dĺžky m, určte tie, ktoré majú najväčší obsah. (*P. Leischner*)