

2003/2004

53. ročník MO

Zadania úloh školského kola kategórie B

(Súťaž sa konala v utorok 27. januára 2004.)

1. Určte, koľko riešení má v obore reálnych čísel rovnica

$$x = [x] + \frac{x}{2004},$$

kde $[x]$ označuje dolnú celú časť čísla x , t. j. najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné ako x . (J. Šimša)

2. Uveďte príklad množiny M pozostávajúcej z dvojciferných čísel, ktorá má maximálny počet prvkov a pritom spĺňa obidve nasledujúce podmienky:

- (i) Každé dve čísla patriace do množiny M sú nesúdeliteľné.
- (ii) Ak zmeníme poradie číslic ľubovoľného čísla patriaceho do množiny M , dostaneme opäť číslo patriace do množiny M .

(J. Földes)

3. Nech $ABCD$ je lichobežník s ostrými uhlami pri základni AB . Nech E je taký bod základne AB , že kružnice opísané trojuholníkom AED a EBC sa dotýkajú zvonku. Dokážte, že bod E leží na kružnici opísanej trojuholníku CDV , kde V je priesečník priamok AD a BC . (R. Horenský)