2003/2004
53. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala v utorok 13. januára 2004.*)

1. Určte počet všetkých päťmiestnych palindrómov, ktoré sú deliteľné číslom 37. (Palindrómom nazývame číslo, ktorého zápis v desiatkovej sústave sa číta rovnako spredu aj zozadu.) (*J. Šimša*)

2. Pre ľubovoľné kladné celé číslo n zostavme z písmen A a B všetky možné „slová" dĺžky n a označme p_n počet tých z nich, ktoré neobsahujú ani trojicu AAA po sebe nasledujúcich písmen A ani dvojicu BB po sebe nasledujúcich písmen B. Zistite, pre ktoré kladné celé čísla n platí, že obe čísla p_n a p_{n+1} sú párne. (*R. Kučera*)

3. Označme K ľubovoľný vnútorný bod strany AB daného trojuholníka ABC. Priamka CK pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnicu opísanú trojuholníku AKL a k_2 kružnicu opísanú trojuholníku BKL.

a) Dokážte, že priamka AC je dotyčnicou ku kružnici k_1 práve vtedy, keď priamka BC je dotyčnicou ku kružnici k_2.

b) Predpokladajme, že priamka AC je sečnicou kružnice k_1. Nech P ($P \neq A$) je priesečník priamky AC s kružnicou k_1 a Q ($Q \neq B$) je priesečník priamky BC s kružnicou k_2. Dokážte, že bod K leží na úsečke PQ.

(*J. Šimša, J. Zhouf*)

4. Nech K, L a M sú postupne priesečníky osí vnútorných uhlov α, β a γ pri vrcholoch A, B a C daného trojuholníka ABC s protiľahlými stranami BC, CA a AB. Dokážte, že platí nerovnosť

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2}\geqq 3.$$

(*J. Švrček*)