

2003/2004

53. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie B

(Súťaž sa konala v utorok 23. marca 2004.)

1. Číslo a_n vznikne tak, že za seba zapíšeme prvých n druhých mocnín po sebe idúcich prirodzených čísel. Napríklad $a_{11} = 149\ 162\ 536\ 496\ 481\ 100\ 121$. Zistite, koľko čísel deliteľných dvanástimi je medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_{100\ 000}$. (P. Černek)

2. Nájdite všetky kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ také, že ak ľubovoľný z koeficientov a, b, c zväčšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, ktorý bude mať dvojnásobný koreň. (E. Kováč)

3. Pre dané prirodzené číslo n vyriešte v obore kladných reálnych čísel rovnicu

$$\lfloor x\sqrt{n^2 - 1} \rfloor = nx - 1.$$

(Symbol $\lfloor r \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako r .) (J. Šimša)

4. Daný je ostrouhlý trojuholník VBA . Zostrojte dotyčnicový štvorholník $ABCD$ s minimálnym obsahom tak, aby jeho vrcholy C, D ležali postupne na polpriamkach opačných k polpriamkam BV a AV . (P. Leischner)