2003/2004
53. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 28. – 31. 3. 2004.*)

1. Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 6 + \min\left\{x^2 - \frac{8}{x^4},\ y^2 - \frac{8}{y^4},\ z^2 - \frac{8}{z^4}\right\}.$$

(*J. Švrček*)

2. Pre ľubovoľné prirodzené číslo n zostavme z písmen A a B všetky možné „slová" dĺžky n a označme p_n počet tých, ktoré neobsahujú štvoricu $AAAA$ po sebe idúcich písmen A ani trojicu BBB po sebe idúcich písmen B. Určte hodnotu výrazu

$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2001} + p_{2000}}.$$

(*R. Kučera*)

3. V rovine je daná kružnica k a 121 jej sečníc $p_1, p_2, \ldots, p_{121}$. Vnútri tejto kružnice je na každej priamke p_i daný bod A_i. Dokážte, že na kružnici k existuje taký bod X, že úsečka A_iX zviera s priamkou p_i uhol menší ako $21°$ pre najmenej 29 rôznych indexov i.
(*J. Šimša*)

4. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n je súčet

$$\frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} + \ldots + \frac{n}{n!}$$

celé číslo. (*E. Kováč*)

5. Nech L je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme K priesečník priamok AL a CD, M priesečník priamok AD a CL a N priesečník priamok MK a BC. Dokážte, že body B, L, M, N ležia na tej istej kružnici. (*J. Švrček*)

6. Nech $\mathbb{R}^+$ je množina všetkých kladných reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré pre všetky kladné čísla x, y spĺňajú rovnosť

$$x^2\bigl(f(x) + f(y)\bigr) = (x + y)f\bigl(f(x)y\bigr).$$

(*P. Kaňovský*)