65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016

Riešenia úloh krajského kola kategórie A

---

1. *Na tabuli sú napísané rôzne kladné celé čísla. Ich aritmetický priemer je desatinné číslo, ktorého desatinná časť je presne* 0,2016*. Akú najmenšiu hodnotu môže tento priemer mať?* (Patrik Bak)

Riešenie. Nech s je súčet čísel na tabuli, n je ich počet a p je celá časť aritmetického priemeru. Potom platí rovnosť

$$\frac{s}{n} = p + \frac{2\,016}{10\,000} = p + \frac{126}{625},$$

z ktorej roznásobením vyjde

$$625(s - pn) = 126n.$$

Z toho vidíme, že 625 delí ľavú stranu, takže musí deliť aj pravú. Avšak čísla 126 a 625 sú nesúdeliteľné, a tak dokonca $625 \mid n$. Určite je preto $n \geqq 625$.

Ďalej využijeme rôznosť čísel na tabuli na zistenie, že

$$p = \frac{s}{n} - \frac{126}{625} \geqq \frac{1+2+\ldots+n}{n} - \frac{126}{625} = \frac{n(n+1)/2}{n} - \frac{126}{625} \geqq \frac{625+1}{2} - \frac{126}{625} > 312.$$

Celé číslo p je teda aspoň 313 a hodnota priemeru aspoň 313,2016.

Ostáva nájsť množinu čísel, ktorých aritmetický priemer by sa tejto hodnote presne rovnal. Voľbou 625-prvkovej množiny $\{1, 2, \ldots, 624, 751\}$ dostávame aritmetický priemer

$$\frac{1+2+\ldots+624+751}{625} = \frac{312 \cdot 625 + 751}{625} = 313 + \frac{126}{625} = 313{,}2016.$$

Odpoveď. Najmenšia možná hodnota priemeru je 313,2016.

Poznámka. Príklad vyhovujúcej množiny čísel s aritmetickým priemerom 313,2016 nie je jediný. Ukážeme, ako jeden (vyššie uvedený) príklad nájsť a ako vyzerajú všetky ostatné.

Z odvodeného odhadu

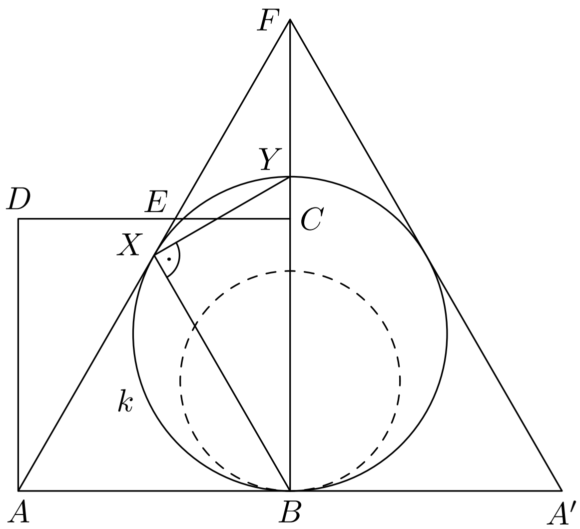
$$p \geqq \frac{n+1}{2} - \frac{126}{625}$$

vyplýva, že hodnota $p = 313$ je možná jedine pre $n = 625$, keď z rovnosti $625(s - pn) = 126n$ dosadením oboch hodnôt p a n dostaneme $s = 126 + 625 \cdot 313$. Taký súčet prvkov charakterizuje všetky hľadané (ako vieme 625-prvkové) množiny prirodzených čísel. Keďže $625 \cdot 313$ je súčet čísel množiny $\{1, 2, \ldots, 625\}$, vyhovujúcu množinu z nej dostaneme, keď napríklad jej najväčší prvok 625 zväčšíme o 126 na hodnotu $625 + 126 = 751$. Dodajme, že na dosiahnutie cieľa môžeme takú operáciu tiež spraviť s ľubovoľným prvkom i uvedenej množiny spĺňajúcim $i \geqq 500$ (pripomeňme, že čísla na tabuli boli rôzne), alebo zodpovedajúco zväčšiť dve či viac čísel súčasne (tak možno napríklad dostať vyhovujúcu množinu $\{1, 2, \ldots, 499, 501, \ldots, 625, 626\}$).

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Dva body dajte za zostrojenie množiny s priemerom rovným 313,2016 a zvyšné štyri za odvodenie, že nižší priemer sa dosiahnuť nedá. Zo štyroch bodov určených pre druhú časť dajte dva za dôkaz, že počet čísel na tabuli je aspoň 625 (stačí aj vzťah $625 \mid n$), jeden za využitie rôznosti čísel na dolný odhad priemeru číslom $(n+1)/2$ a jeden bod za skombinovanie oboch výsledkov. Ak riešiteľ nespomenie nesúdeliteľnosť čísel 126 a 625, body nestrhávajte. Tiež netrestajte, ak riešiteľom zostrojená množina nevyhovuje iba vinou drobnej aritmetickej chyby (napríklad číslo 751 z nášho príkladu je zamenené číslom 750).

2. *Daný je štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 1. Na jeho strane CD zvolíme bod E tak, aby platilo $|\measuredangle BAE| = 60°$. Ďalej zvoľme ľubovoľný vnútorný bod úsečky AE a označme ho X. Bodom X potom veďme kolmicu na priamku BX a jej priesečník s priamkou BC označme Y. Aká je najmenšia možná dĺžka úsečky BY?* (Michal Rolínek)

Riešenie. Nech X a Y sú ľubovoľné dva body opísané v zadaní. Uvažujme Tálesovu kružnicu nad priemerom BY opísanú pravouhlému trojuholníku BYX. Tá obsahuje bod X úsečky AE a zároveň sa v bode B dotýka priamky AB. Zo všetkých takých kružníc má zrejme najmenší priemer kružnica k, ktorá má s úsečkou AE spoločný iba jeden bod, teda sa jej dotýka, a je preto vpísaná do rovnostranného trojuholníka $AA'F$, pričom A' je obraz bodu A v stredovej súmernosti podľa vrcholu B a F leží na polpriamke BC (pozri obr. 1, kde je vykreslená aj jedna z tých kružníc s dotyčnicou AB v bode B, ktoré majú menší polomer ako kružnica k, a tak k úsečke AE „nedosahujú“). Keďže stred kružnice k je zároveň ťažiskom trojuholníka $AA'F$ so stranami dĺžky 2, má jej priemer dĺžku $|BY| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ a zodpovedajúci bod X je stredom strany AF, takže naozaj patrí úsečke AE, pretože $|AX| = 1 < |AE|$.



Obr. 1

Odpoveď. Najmenšia možná dĺžka úsečky BY je $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Iné riešenie. Vezmime ľubovoľné prípustné body X a Y, označme X_0 pätu kolmice z bodu X na AB a položme $|AX| = 2x$. Trojuholník AXX_0 má vnútorné uhly s veľkosťami 30°, 60° a 90°, takže $|AX_0| = x$, $|X_0B| = 1 - x$ a $|XX_0| = \sqrt{3}x$. Podľa Pytagorovej vety pre trojuholník XX_0B potom platí $|BX|^2 = 4x^2 - 2x + 1$. Navyše pravouhlé trojuholníky XX_0B a BXY sú podobné (uhly X_0XB a YBX sú zhodné striedavé uhly priečky BX rovnobežiek BY a XX_0), a my tak môžeme vyjadriť dĺžku úsečky BY ako

$$|BY| = |BX| \cdot \frac{|BX|}{|XX_0|} = \frac{4x^2 - 2x + 1}{\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{3}\Big(4x + \frac{1}{x} - 2\Big).$$

Podľa AG-nerovnosti navyše platí $4x + 1/x \geqq 4$, takže $|BY| \geqq \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Keďže rovnosť nastáva v prípade, že $4x = 1/x$, t. j. $x = \frac{1}{2}$, čiže $|AX| = 2x = 1 < |AE|$, bod X je vtedy naozaj bodom úsečky AE. Hodnota $|BY| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ je preto dosiahnuteľná, a teda je zároveň hľadaným minimom.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za určenie bodov X a Y takých, že $|BY| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, dajte dva body, pritom v prípade, že riešiteľ úplne zabudne uviesť, prečo ním nájdený bod X leží na úsečke AE, dajte iba jeden bod. Zvyšné štyri body dajte za dôkaz, že nižšia hodnota sa dosiahnuť nedá. Ak postupuje riešiteľ výpočtom, dajte dva body za vyjadrenie dĺžky úsečky BY pomocou akéhokoľvek parametra určujúceho polohu bodu X (dĺžka AX, uhol ABX a pod.).

---

3. *Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť množina* $\{1, 2, \ldots, 12\}$ *na šesť disjunktných dvojprvkových podmnožín takých, že každá z nich obsahuje navzájom nesúdeliteľné čísla (teda také, ktoré nemajú spoločného deliteľa väčšieho ako 1)?* (Martin Panák)

Riešenie. Žiadne dve párne čísla nemôžu byť v tej istej zo šiestich dvojprvkových podmnožín (nazývajme ich ďalej „páry“), a my sa tak môžeme obmedziť na také rozdelenia množiny $\{1, 2, \ldots, 12\}$ (nazývajme ich *párnonepárne*), v ktorých sú páry tvorené vždy jedným párnym a jedným nepárnym číslom. Ďalšie obmedzenie je, že k číslu 6 ani k číslu 12 nesmieme priradiť čísla 3 a 9; k číslu 10 nesmie byť priradené číslo 5. Počet vyhovujúcich párnonepárnych rozdelení určíme dvoma spôsobmi.

Prvý spôsob. Jednotlivým nepárnym číslam od 1 do 11 najskôr určíme potenciálnych párnych „partnerov“. Pre čísla 1, 7 a 11 tvoria množinu $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, pre čísla 3 a 9 množinu $\{2, 4, 8, 10\}$ a pre číslo 5 množinu $\{2, 4, 6, 8, 12\}$. Z toho je vidno, že na určenie počtu všetkých vyhovujúcich výberov párnych partnerov nemôžeme priamo uplatniť pravidlo súčinu, nech už by sme výber uskutočňovali postupne pre dané nepárne čísla v akomkoľvek poradí. Pre „nádejné“ poradie $(5, 3, 9, 1, 7, 11)$ však pravidlo súčinu zafunguje, ak najskôr rozlíšime, či je číslu 5 priradené číslo z $\{6, 12\}$, alebo číslo z $\{2, 4, 8\}$.[1] Možností je teda $2\cdot4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot1 = 144$ v prípade prvom a $3\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot1 = 108$ v druhom. Spolu tak máme $144 + 108 = 252$ možností.

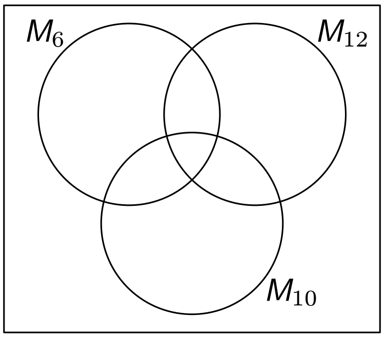
Druhý spôsob. Keďže pri párnonepárnom rozdelení musí byť každé zo šiestich nepárnych čísel v páre s iným zo šiestich párnych čísel, je počet všetkých takých (vyhovujúcich aj nevyhovujúcich) rozdelení rovný $6! = 720$. Spočítame teraz, koľko z týchto párnonepárnych rozdelení je nevyhovujúcich.

Všetky nevyhovujúce párnonepárne rozdelenia tvoria zrejme množinu $M_6 \cup M_{12} \cup M_{10}$, pričom M_6 je množina tých párnonepárnych rozdelení množiny $\{1, 2, \ldots, 12\}$, v ktorých je s číslom 6 v páre číslo 3 alebo 9, M_{12} je množina párnonepárnych rozdelení, v ktorých je s číslom 12 číslo 3 alebo 9 a napokon M_{10} je množina tých rozdelení, v ktorých je s číslom 10 v páre číslo 5. Veľkosť zjednotenia $M_6 \cup M_{12} \cup M_{10}$ je podľa princípu inklúzie a exklúzie, ktorého platnosť možno pre tri množiny nahliadnuť pomocou Vennovho diagramu (obr. 2), rovná

$$\begin{aligned} &|M_6| + |M_{12}| + |M_{10}| - |M_6 \cap M_{12}| - |M_6 \cap M_{10}| - |M_{12} \cap M_{10}| + |M_6 \cap M_{12} \cap M_{10}| = \\ &= 2\cdot5! + 2\cdot5! + 5! - 2\cdot4! - 2\cdot4! - 2\cdot4! + 2\cdot3! = 468. \end{aligned}$$

Keďže všetkých párnonepárnych rozdelení je 720 a nevyhovujúcich je 468, počet vyhovujúcich je $720 - 468 = 252$.

[1] K tomuto rozboru sme motivovaní prienikom určených množín $\{2, 4, 6, 8, 12\}$ a $\{2, 4, 8, 10\}$.



Obr. 2

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak riešiteľ správne určí výsledok v „kombinatorickom tvare“ (napr. ako $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$) a dopustí sa chyby iba pri jeho vyčíslení, dajte päť bodov. Ak predloží funkčný spôsob, ako sa dopočítať k výsledku (iný ako výpis všetkých možností), a riešenie nedokončí alebo v jeho priebehu pochybí, dajte nanajvýš tri body. Za pozorovanie o párnonepárnych rozdeleniach ani za výpis súdeliteľných dvojíc body neudeľujte.

---

4. *Určte najmenšie reálne číslo m, pre ktoré možno nájsť reálne čísla a a b tak, aby nerovnosť*

$$|x^2 + ax + b| \leqq m(x^2 + 1)$$

platila pre každé $x \in \langle -1, 1\rangle$. (*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Predpokladajme, že čísla a, b, m spĺňajú podmienku

$$\forall x \in \langle -1, 1\rangle : |f(x)| \leqq m(x^2 + 1), \quad \text{pričom} \quad f(x) = x^2 + ax + b.$$

Najskôr ukážeme, že aspoň jeden z rozdielov $f(1) - f(0)$ a $f(-1) - f(0)$ je väčší alebo rovný jednej: pre ľubovoľnú funkciu $f(x) = x^2 + ax + b$ je totiž

$$f(0) = b, \quad f(1) = 1 + a + b, \quad f(-1) = 1 - a + b,$$

takže

$$\max\bigl(f(1) - f(0), f(-1) - f(0)\bigr) = \max(1 + a, 1 - a) = 1 + |a| \geqq 1.$$

Predpoklad z úvodu riešenia znamená, že $|f(1)| \leqq 2m$, $|f(-1)| \leqq 2m$ a $|f(0)| \leqq m$. Preto buď

$$1 \leqq 1 + |a| = f(1) - f(0) \leqq |f(1)| + |f(0)| \leqq 2m + m = 3m, \tag{1}$$

alebo

$$1 \leqq 1 + |a| = f(-1) - f(0) \leqq |f(-1)| + |f(0)| \leqq 2m + m = 3m. \tag{2}$$

V oboch prípadoch dostávame odhad $m \geqq \frac{1}{3}$.

Pokúsime sa ukázať, že $m = \frac{1}{3}$ spĺňa požiadavky úlohy. Pre také m v (1) alebo (2) platí všade rovnosť, takže musí byť $a = 0$, $-f(0) = |f(0)|$ a $|f(0)| = m = \frac{1}{3}$, čiže $b = f(0) = -\frac{1}{3}$. Zdôraznime, že pre nájdené hodnoty m, a, b zatiaľ nič nevieme o platnosti nerovnosti zo zadania úlohy pre hodnoty $x \in \langle -1, 1\rangle$ rôzne od čísel -1, 0 a 1, o ktorých sme doposiaľ vôbec neuvažovali.

Overme teda, že nájdená funkcia $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ pre $m = \frac{1}{3}$ podmienky úlohy spĺňa: Nerovnosť $|x^2 - \frac{1}{3}| \leqq \frac{1}{3}(x^2 + 1)$ je ekvivalentná s nerovnosťami

$$-\frac{1}{3}(x^2+1) \leqq x^2 - \frac{1}{3} \leqq \frac{1}{3}(x^2+1), \quad \text{čiže} \quad -x^2 - 1 \leqq 3x^2 - 1 \leqq x^2 + 1$$

a tie sú ekvivalentné s nerovnosťami $0 \leqq x^2 \leqq 1$, ktoré sú na intervale $\langle -1, 1\rangle$ zrejme splnené.

Odpoveď. Hľadané najmenšie m je rovné zlomku $\frac{1}{3}$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za nájdenie hodnôt parametrov a, b pre $m = 1/3$ dajte jeden bod, ďalší (druhý) bod potom dajte za priame overenie vzťahu zo zadania. Za odvodenie *nutnej* podmienky $m \geqq 1/3$ dajte štyri body. Ak nahradí riešiteľ algebraické použitie trojuholníkovej nerovnosti obdobnou geometrickou úvahou, body nestrhávajte. Naopak za úvahy o tvare grafu kvadratickej funkcie (napríklad mlčky využívajúce jej konvexnosť) body neudeľujte, ak nie sú tieto úvahy sprevádzané dodatočnými argumentmi.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016