65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9*

---

1. *Objem vody v mestskom bazéne s obdĺžnikovým dnom je 6 998,4 hektolitrov. Propagačný leták uvádza, že keby sme chceli všetku vodu z bazéna preliať do pravidelného štvorbokého hranola s hranou podstavy rovnajúcou sa priemernej hĺbke bazéna, musel by byť hranol vysoký ako blízky televízny vysielač a potom by bol naplnený až po okraj. Dodávame, že keby sme chceli preplávať vzdialenosť rovnakú, ako je výška vysielača, museli by sme preplávať buď osem dĺžok, alebo pätnásť šírok bazéna. Aký vysoký je vysielač?* (*Libor Šimůnek*)

Nápad. Odvoďte najskôr vzťah medzi výškou vysielača a priemernou hĺbkou bazéna.

Riešenie. Všetky dĺžky budeme vyjadrovať v metroch, a to pri tomto označení: $h =$ = priemerná hĺbka bazéna, d = dĺžka bazéna, $š$ = šírka bazéna, v = výška vysielača. Objem bazéna preto vyjadríme v metroch kubických: $6998{,}4\,\mathrm{hl} = 699{,}84\,\mathrm{m}^3$. Informácie v zadaní sa dajú zapísať nasledujúcimi rovnicami:

$$699{,}84 = h \cdot š \cdot d = v \cdot h^2, \tag{1}$$
$$v = 8d = 15š. \tag{2}$$

Z rovností (2) môžeme vyjadriť $d = v/8$ a $š = v/15$. Po dosadení do jednej z rovností v (1), vydelení h, resp. v (ktoré sú určite nenulové) a úprave dostávame:

$$\begin{aligned} h \cdot \frac{v}{15} \cdot \frac{v}{8} &= v \cdot h^2, \\ \frac{v}{120} &= h, \\ v &= 120h. \end{aligned}$$

Tento vzťah dosadíme do inej rovnosti v (1) a zistíme hodnotu neznámej h:

$$\begin{aligned} 699{,}84 &= 120h \cdot h^2, \\ 5{,}832 &= h^3, \\ h &= 1,8. \end{aligned}$$

Vysielač je vysoký $v = 120 \cdot 1{,}8 = 216$ metrov.

---

2. *Úžasným číslom nazveme také párne číslo, ktorého rozklad na súčin prvočísel má práve tri nie nutne rôzne činitele a súčet všetkých jeho deliteľov je rovný dvojnásobku tohto čísla. Nájdite všetky úžasné čísla.* (*Martin Mach*)

Nápad. Koľko najviac deliteľov môže mať číslo, ktoré je súčinom troch nie nutne rôznych prvočísel?

Riešenie. Keďže úžasné číslo je párne, aspoň jeden z jeho prvočíselných deliteľov je 2; zvyšné dva prvočíselné delitele označme b a c. Úžasné číslo je teda rovné súčinu $2bc$. Všetky delitele takéhoto čísla sú 1, 2, b, c, $2b$, $2c$, bc, $2bc$, pričom niektoré z týchto čísel sa môžu rovnať. Postupne rozoberieme všetky možnosti podľa počtu a typu rôznych prvočíselných deliteľov.

a) Predpokladajme, že všetky prvočíselné delitele sú rovnaké, teda $b = c = 2$. V takom prípade by úžasné číslo bolo 8 a všetky jeho delitele by boli 1, 2, 4, 8. Súčet všetkých deliteľov by bol 15, čo nie je dvojnásobok čísla 8. Prípad $b = c = 2$ teda nie je možný.

b) Predpokladajme, že dva prvočíselné delitele sú rovné 2, teda $b = 2$. V takom prípade by úžasné číslo bolo $4c$ a všetky jeho delitele by boli 1, 2, c, 4, $2c$, $4c$. Súčet všetkých deliteľov by bol $7 + 7c$ a podľa zadania má platiť

$$7 + 7c = 8c.$$

To platí práve vtedy, keď $c = 7$; zodpovedajúce úžasné číslo je $4c = 28$.

c) Predpokladajme, že dva prvočíselné delitele sú rovnaké, ale oba rôzne od 2, teda $b = c \neq 2$. V takom prípade by úžasné číslo bolo $2b^2$ a všetky jeho delitele by boli 1, 2, b, $2b$, b^2, $2b^2$. Súčet všetkých deliteľov by bol $3 + 3b + 3b^2$ a podľa zadania má platiť

$$\begin{aligned} 3 + 3b + 3b^2 &= 4b^2, \\ 3(1 + b) &= b^2. \end{aligned}$$

Číslo naľavo je násobkom čísla 3, preto číslo napravo má tiež byť násobkom 3. Vzhľadom na to, že b je prvočíslo, muselo by byť $b = 3$. V takom prípade by však naľavo bolo $3 \cdot 4 = 12$, zatiaľ čo napravo $3^2 = 9$. Prípad $b = c \neq 2$ teda nie je možný.

d) Predpokladajme, že prvočíselné delitele sú navzájom rôzne, teda $2 \neq b \neq c \neq 2$. V takom prípade by úžasné číslo bolo $2bc$ a všetky jeho delitele by boli 1, 2, b, c, $2b$, $2c$, bc, $2bc$. Súčet všetkých deliteľov by bol $3 + 3b + 3c + 3bc$ a podľa zadania má platiť

$$\begin{aligned} 3 + 3b + 3c + 3bc &= 4bc, \\ 3(1 + b + c) &= bc. \end{aligned}$$

Číslo naľavo je násobkom čísla 3, preto číslo napravo má tiež byť násobkom 3. Vzhľadom na to, že b a c sú prvočísla, muselo by byť buď $b = 3$, alebo $c = 3$. Pre $b = 3$ by predchádzajúca rovnosť prešla na $3 \cdot (4 + c) = 3c$, čo však neplatí pre žiadne c. Diskusia pre $c = 3$ je obdobná. Prípad $b \neq c \neq 2$ teda nie je možný.

Jediné úžasné číslo je 28.

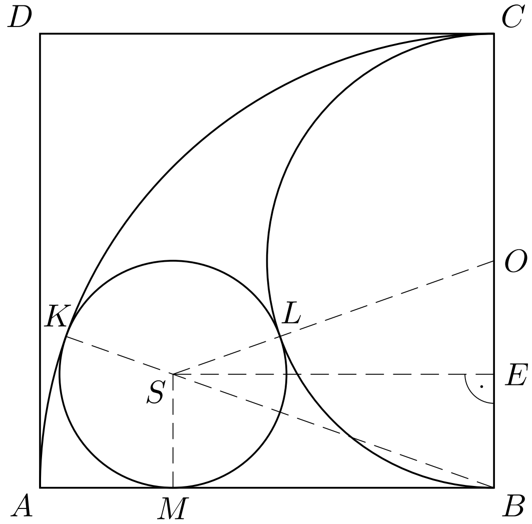
Poznámka. Nemožnosť prípadu c) môže byť zdôvodnená aj takto: Každé prvočíslo $b \neq 2$ je nepárne, preto číslo b^2 je tiež nepárne, zatiaľ čo číslo $1 + b$ (rovnako ako akýkoľvek jeho násobok) je párne. V uvedenej rovnosti na pravej strane by teda malo byť nepárne číslo, zatiaľ čo na ľavej strane párne. Podobný argument však nič neodhalí v prípade d).

---

3. *Juro zostrojil štvorec $ABCD$ so stranou* 12 cm. *Do tohto štvorca narysoval štvrťkružnicu k, ktorá mala stred v bode B a prechádzala bodom A, a polkružnicu l, ktorá mala stred v strede strany BC a prechádzala bodom B. Rád by ešte zostrojil kružnicu, ktorá by ležala vnútri štvorca a dotýkala sa štvrťkružnice k, polkružnice l aj strany AB. Určte polomer takej kružnice.* (*Marta Volfová*)

Nápad. Porozmýšľajte, ako by ste pomocou polomeru hľadanej kružnice vyjadrili vzdialenosť jej stredu od úsečky AB, príp. BC.

Riešenie. Počas riešenia sa odkazujeme na nasledujúci obrázok, v ktorom O označuje stred strany BC, S označuje stred Jurovej vytúženej kružnice h, K označuje dotykový bod kružníc h a k, L označuje dotykový bod kružníc h a l a M označuje dotykový bod kružnice h a úsečky AB. Ďalej budeme odkazovať na pomocný bod E, ktorý je pätou kolmice z bodu S na stranu BC. Hľadaný polomer kružnice h v cm označíme r.



Vzdialenosť bodu S od úsečky AB je rovná $r = |SM| = |EB|$. Vzdialenosť bodu S od úsečky BC je rovná veľkosti úsečky SE, ktorá je odvesnou ako v pravouhlom trojuholníku SEO, tak v trojuholníku SEB. Všetky zvyšné strany v oboch trojuholníkoch ľahko vyjadríme pomocou r; z toho pomocou Pytagorovej vety budeme vedieť určiť neznámu r.

Body S a O sú stredmi kružníc h a l, ktoré sa dotýkajú v bode L. Tieto tri body ležia na jednej priamke, vzdialenosť SO je preto rovná

$$|SO| = |SL| + |LO| = r + 6.$$

Podobne, vzdialenosť SB je rovná

$$|SB| = |BK| - |KS| = 12 - r,$$

lebo S a O sú stredy kružníc h a k a K je ich dotykovým bodom. Vzdialenosť OE je rovná

$$|OE| = |OB| - |BE| = 6 - r.$$

Z toho a z Pytagorovej vety v trojuholníkoch SEO a SEB dostávame

$$\begin{aligned}
|SE|^2 = |SO|^2 - |OE|^2 &= |SB|^2 - |BE|^2,\\
(6 + r)^2 - (6 - r)^2 &= (12 - r)^2 - r^2,\\
12r + 12r &= 144 - 24r,\\
48r &= 144,\\
r &= 3.
\end{aligned}$$

Polomer hľadané kružnice je 3 cm.

4. *V tabuľke je kurzový lístok zmenárne, avšak niektoré hodnoty sú v ňom nahradené otáznikmi.*

	nákup	*predaj*
1 EUR	*26,20 CZK*	*28,00 CZK*
1 GBP	*? CZK*	*? CZK*

Zmenáreň vymieňa peniaze v uvedených kurzoch a neúčtuje si iné poplatky.

1. *Koľko eur dostane zákazník, ak tu zmení 4 200 českých korún?*

Ak zmenárnik vykúpi od zákazníka 1 000 libier a potom ich všetky predá, jeho celkový zisk je 2 200 českých korún. Keby namiesto toho zmenárnik predal 1 000 libier a potom by všetky utŕžené české koruny zmenil s iným zákazníkom za libry, zarobil by na tom 68,75 libier.

2. *Za koľko českých korún zmenárnik nakupuje a za koľko predáva 1 libru?*

(*Libor Šimůnek*)

Nápad. Pri 2. časti úlohy si po každej transakcii pomocou neznámych zapíšte, koľko zmenárnikovi pribudlo či ubudlo korún a koľko mu pribudlo či ubudlo libier.

Riešenie. 1. Keď má zmenáreň vydať eurá zákazníkovi, znamená to, že zmenáreň eurá predáva. Pracujeme preto s hodnotou v stĺpci „predaj“, t. j. 28 CZK. Zákazník dostane $4\,200 : 28 = 150$ eur.

2. Neznámu v stĺpci „nákup“ označíme n, v stĺpci „predaj“ použijeme p. Keď zmenáreň vykúpi 1 000 libier a potom ich všetky predá, množstvo libier v zmenárni sa nezmení; počet korún sa najskôr zmenší o $1\,000n$ a potom sa zväčší o $1\,000p$. Zisk 2 200 korún môžeme vyjadriť nasledujúcou rovnicou, ktorú hneď upravíme:

$$\begin{aligned} -1\,000n + 1\,000p &= 2\,200,\\ 1\,000p &= 2\,200 + 1\,000n, \\ p &= 2{,}2 + n. \end{aligned} \tag{1}$$

Keď zmenárnik predá 1 000 libier a potom všetky utŕžené koruny zmení s iným zákazníkom za libry, počet korún v zmenárni sa síce prechodne zväčší o $1\,000p$, ale nakoniec zostane rovný východiskovej hodnote. Suma libier sa najskôr zmenší o 1 000 a potom sa zväčší o počet libier, ktoré zmenárnik nakúpi za $1\,000p$ korún, tzn. o $1\,000p/n$ libier. Zisk 68,75 libier môžeme vyjadriť nasledujúcou rovnicou, ktorú hneď upravíme:

$$\begin{aligned} -1\,000 + 1\,000\frac{p}{n} &= 68{,}75,\\ 1\,000p &= 1\,068{,}75n, \\ p &= 1{,}06875n. \end{aligned} \tag{2}$$

Porovnaním (1) a (2) dostávame

$$\begin{aligned} 2\,200 + 1\,000n &= 1\,068{,}75n,\\ 68{,}75n &= 2\,200,\\ n &= 32. \end{aligned}$$

Odtiaľ dosadením do (1), resp. (2) získame $p = 34{,}2$. Zmenáreň teda nakupuje jednu libru za 32 CZK a predáva ju za 34,20 CZK.

5. *Betka si myslela prirodzené číslo s navzájom rôznymi ciframi a napísala ho na tabuľu. Podeň zapísala cifry pôvodného čísla odzadu a tak získala nové číslo. Sčítaním týchto dvoch čísel dostala číslo, ktoré malo rovnaký počet cifier ako myslené číslo a skladalo sa iba z cifier mysleného čísla (avšak nemuselo obsahovať všetky jeho cifry). Erike sa Betkino číslo zapáčilo a chcela nájsť iné číslo s rovnakými vlastnosťami. Zistila, že neexistuje menšie také číslo ako Betkino a väčšie sa jej hľadať nechcelo. Určte, aké číslo si myslela Betka a aké číslo by mohla nájsť Erika, keby mala viac trpezlivosti.*

(*Katarína Jasenčáková*)

Nápad. Zvažujte postupne možnosti, keď je myslené číslo jednociferné, dvojciferné atď. V jednotlivých prípadoch porozmýšľajte postupne nad možnými súčtami na mieste jednotiek, desiatok atď.

Riešenie. Najskôr nájdeme Betkino číslo, t. j. najmenšie číslo s uvedenými vlastnosťami.

1) Predpokladajme, že Betkino číslo je jednociferné, a označme ho a. Potom by podľa zadania muselo platiť $a + a = a$, čo platí iba vtedy, keď $a = 0$. Nula však nie je prirodzené číslo, takže Betkino myslené číslo nemôže byť jednociferné.

2) Predpokladajme, že Betkino číslo je dvojciferné, a označme ho $\overline{ab}$. Nech už súčet $\overline{ab} + \overline{ba}$ dopadne akokoľvek, na mieste jednotiek čítame buď $b + a = a$, alebo $b + a = b$. Z toho dostávame buď $b = 0$, alebo $a = 0$. V takom prípade by však buď číslo $\overline{ba}$, alebo číslo $\overline{ab}$ nebolo dvojciferné. Betkino myslené číslo teda nemôže byť dvojciferné.

3) Predpokladajme, že Betkino číslo je trojciferné, a označme ho $\overline{abc}$. Z rovnakého dôvodu ako vyššie nemôžu byť čísla a a c nuly, preto v súčte $\overline{abc} + \overline{cba}$ sa na mieste jednotiek môže objaviť jedine b:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ c & b & a \\ \hline * & * & b \end{array}$$

Súčasne $c + a$ nemôže byť väčšie ako 9, pretože potom by celkový súčet $\overline{abc} + \overline{cba}$ nebol trojciferný. Z toho sa dozvedáme, že

$$a + c = b, \tag{1}$$

čo okrem iného znamená, že ani cifra b nemôže byť 0.

Z toho vyplýva, že súčet $b + b$ na mieste desiatok nemôže byť menší ako 10; v takom prípade by totiž súčet bol rovný jednému z čísel a, b, c, čo vždy vedie k nejakému sporu s predchádzajúcimi poznatkami:

- Ak $b + b = a$ alebo $b + b = c$, tak podľa (1) dostávame $2a + 2c = a$ alebo $2a + 2c = c$, teda $a = -2c$ alebo $c = -2a$, čo nie je možné.
- Ak $b + b = b$, tak $b = 0$, čo nie je možné.

Súčet $b + b$ na mieste desiatok však nemôže byť ani väčší ako 9. V takom prípade by totiž súčet na mieste stoviek bol $a + c + 1$ a toto číslo má byť rovné jednému z čísel a, b, c; to vždy vedie k nejakému sporu:

- Ak $a + c + 1 = a$ alebo $a + c + 1 = c$, tak $c = -1$ alebo $a = -1$, čo nie je možné.
- Ak $a + c + 1 = b$, tak podľa (1) dostávame $b + 1 = b$, teda $1 = 0$, čo nie je možné.

Betkino myslené číslo teda nemôže byť ani trojciferné.

4) Predpokladajme, že Betkino číslo je štvorciferné, a označme ho $\overline{abcd}$. Z rovnakého dôvodu ako vyššie nemôžu byť čísla a a d nuly, teda v súčte $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ sa na mieste jednotiek môže objaviť buď b, alebo c:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ \hline * & * & * & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ \hline * & * & * & c \end{array}$$

Súčasne $d+a$ nemôže byť väčšie ako 9, pretože inak by celkový súčet $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ nebol štvorciferný. Z toho sa dozvedáme, že

$$\text{buď} \quad a + d = b, \tag{2}$$

$$\text{alebo} \quad a + d = c. \tag{3}$$

To okrem iného znamená, že buď $b \neq 0$, alebo $c \neq 0$.

Teraz predpokladáme, že súčet $c+b$ na mieste desiatok je menší ako 10, tzn. tento súčet je rovný jednému z čísel a, b, c, d, a preskúmame jednotlivé prípady. Najskôr uvažujme platnosť (2), a teda $b \neq 0$:

- Ak $b + c = a$ alebo $b + c = d$, tak podľa (2) dostávame $a + d + c = a$ alebo $a + d + c = d$, teda $c = -d$ alebo $c = -a$, čo nie je možné.
- Ak $b + c = b$, tak $c = 0$ (čo ničomu nevadí).
- Ak $b + c = c$, tak $b = 0$, čo nie je možné.

Podobne za predpokladu (3) zistíme, že jediná prípustná možnosť je

- $b + c = c$, teda $b = 0$.

Celkom tak objavujeme dva možné prípady:

$$\begin{array}{cccc} a & b & 0 & d \\ d & 0 & b & a \\ \hline b & b & b & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a & 0 & c & d \\ d & c & 0 & a \\ \hline c & c & c & c \end{array} \tag{4}$$

Keďže Betkino číslo je najmenšie číslo vyhovujúce všetkým uvedeným podmienkam, vôbec sa nemusíme zaoberať prípadom, keď súčet $c+b$ je väčší ako 9, a sústredíme sa len na druhú z vyššie menovaných možností, t. j. $b = 0$. Dosadíme najmenšie možné číslo na miesto tisícok $a = 1$ a zisťujeme, že $c = d + 1$. Najmenšia vyhovujúca možnosť je $d = 2$ a $c = 3$. Betka si teda myslela číslo 1 032 a jej výpočet vyzeral takto:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

Z vyššie uvedeného je teraz jednoduché doplniť nejaké iné číslo s uvedenými vlastnosťami, teda nejaké Erikino číslo. Napr. stačí v Betkinom čísle zameniť cifry na mieste jednotiek a tisícok alebo cifry na mieste desiatok a stoviek, príp. uvažovať akékoľvek čísla tvaru (4). Medzi možnými riešeniami sú aj čísla, keď súčet $c + b$ je väčší ako 9. Tu je niekoľko riešení, na ktoré mohla Erika prísť, keby nebola taká netrpezlivá:

$$\begin{array}{r} 1\,0\,4\,3 \\ 3\,4\,0\,1 \\ \hline 4\,4\,4\,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,3\,0\,2 \\ 2\,0\,3\,1 \\ \hline 3\,3\,3\,3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,8\,9\,7 \\ 7\,9\,8\,1 \\ \hline 9\,8\,7\,8 \end{array}$$

Poznámky. Pokiaľ vieme zdôvodniť, že hľadané Betkino číslo musí byť aspoň štvorciferné, tak ho môžeme ľahko nájsť skúšaním:

Najmenšie štvorciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi je 1 023. Toto číslo však nie je riešením, pretože $1\,023 + 3\,201 = 4\,224$. Ak nás napadne vymeniť cifry 2 a 3, dostaneme vyhovujúce riešenie: $1\,032 + 2\,301 = 3\,333$. Aby sme sa presvedčili, že toto riešenie je najmenšie možné, stačí overiť, že žiadne číslo medzi 1 023 a 1 032 nevyhovuje všetkým uvedeným podmienkam.

Nahradenie ostatných úvah skúšaním je tiež možné, avšak často veľmi prácne. No ak je riešenie založené na skúšaní úplné, nech je považované za správne. Akékoľvek čiastočné všeobecné postrehy môžu počet možností na preskúšanie zaujímavo znižovať (napr. počet trojíc rôznych čísel od 1 do 9 vyhovujúcich rovnosti (1) určite nie je väčší ako 32).

---

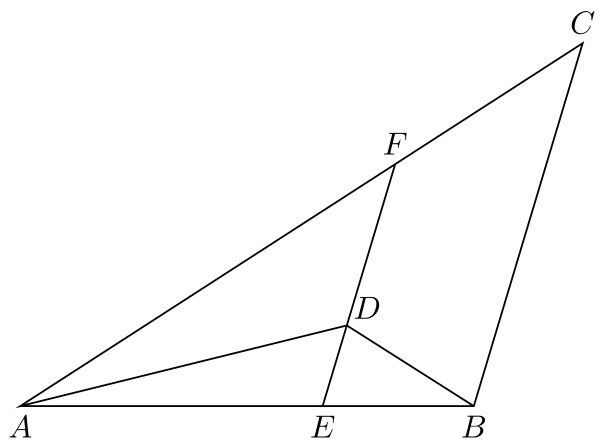
6. *Na stranách AB a AC trojuholníka ABC ležia postupne body E a F, na úsečke EF leží bod D. Priamky EF a BC sú rovnobežné a súčasne platí*

$$|FD| : |DE| = |AE| : |EB| = 2 : 1.$$

Trojuholník ABC má obsah 27 hektárov a úsečkami EF, AD a DB je rozdelený na štyri časti. Určte obsahy týchto štyroch častí. (*Vojtěch Žádník*)

Nápad. Začnite s obsahom trojuholníka AEF.

Riešenie. Najskôr si zadanie verne znázorníme:



Priamky EF a BC sú rovnobežné, súhlasné uhly pri vrcholoch E a B, resp. pri vrcholoch F a C sú zhodné, trojuholníky AEF a ABC sú teda podobné. Zodpovedajúci koeficient podobnosti je rovný

$$|AE| : |AB| = |AE| : (|AE| + |EB|) = 2 : 3.$$

Obsahy týchto trojuholníkov sú teda v pomere

$$S_{AEF} : S_{ABC} = 4 : 9,$$

takže $S_{AEF} = S_{ABC} \cdot 4 : 9 = 12$ hektárov.

Úsečka AD delí trojuholník AEF na dva trojuholníky, ktorých obsahy sú v rovnakom pomere ako dĺžky úsečiek FD a DE, teda

$$S_{ADF} : S_{ADE} = |FD| : |DE| = 2 : 1.$$

Z toho vyplýva, že $S_{ADE} = S_{AEF} : 3 = 4$ hektáre a $S_{ADF} = 2 \cdot S_{ADE} = 8$ hektárov.

Úsečka DE delí trojuholník ABD na dva trojuholníky, ktorých obsahy sú v rovnakom pomere ako dĺžky úsečiek AE a EB, teda

$$S_{ADE} : S_{BDE} = |AE| : |EB| = 2 : 1.$$

Z toho vyplýva, že $S_{BDE} = S_{ADE} : 2 = 2$ hektáre.

Teraz poznáme obsahy troch zo štyroch častí trojuholníka ABC, obsah tej poslednej je rovný rozdielu $S_{BCFD} = S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDE} = 13$ hektárov. Obsahy častí trojuholníka ABC v hektároch sú

$$S_{BED} = 2, \quad S_{AED} = 4, \quad S_{ADF} = 8, \quad S_{BCFD} = 13.$$

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, E. Patáková, K. Pazourek, M. Petrová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Róbert Hajduk, Erika Novotná, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015