

65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z5

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov. Inými slovami, napr. nepíšete pri žiakovi, že skončil na 2. mieste, ak pred ním skončili traja žiaci s plným počtom bodov a on má o jeden bod menej – v takom prípade mu patrí 4. miesto.

1. Mamička zavára slivky do fľaš tak, že slivky z jednej fľaše jej vystačia buď na 16 šatôčok, alebo na 4 koláčiky, alebo na polovicu plechu ovocných rezov. V špajze má 4 také fľaše a chce upiecť jeden plech ovocných rezov a 6 koláčikov. Na koľko šatôčok jej vystačia zvyšné slivky? (Michaela Petrová)

Riešenie. Najskôr zistíme, koľko ktorých dobrôt sa dá pripraviť zo všetkých sliviek:

- Štyri fľaše sliviek vystačia na $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ celé plechy ovocných rezov.
- Štyri fľaše sliviek vystačia na $4 \cdot 4 = 16$ koláčikov.
- Štyri fľaše sliviek vystačia na $4 \cdot 16 = 64$ šatôčok.

V spotrebe sliviek teda platia rovnosti:

$$2 \text{ plechy} = 16 \text{ koláčikov} = 64 \text{ šatôčok.}$$

Keď mamička spotrebuje slivky na jeden plech ovocných rezov, spotrebuje polovicu všetkých sliviek. Zvyšia tak slivky na

$$1 \text{ plech} = 8 \text{ koláčikov} = 32 \text{ šatôčok.}$$

Keď spotrebuje ešte slivky na 6 koláčikov, zvyšné slivky už vystačia len na 2 koláčiky, teda na štvrtinu predchádzajúceho množstva. Zo zvyšných sliviek teda možno upiecť

$$2 \text{ koláčiky} = 8 \text{ šatôčok.}$$

Návrh hodnotenia. 2 body za vyjadrenie množstva jednotlivých druhov, ktoré možno upiecť zo všetkých sliviek; po 1 bode za vyjadrenie spotreby sliviek na 1 plech a 6 koláčikov; 2 body za vyjadrenie spotreby sliviek na šatôčky a záver.

Poznámka. Úvodné prevádzajúce vzťahy možno zapísať aj takto:

$$1 \text{ plech} = 8 \text{ koláčikov}, \quad 1 \text{ koláčik} = 4 \text{ šatôčky}.$$

Predchádzajúce úvahy potom môžeme zjednodušiť nasledovne:

Po upečení plechu ovocných rezov zvýšia slivky na 1 plech, t. j. na 8 koláčikov. Po upečení ďalších 6 koláčikov zvýšia slivky na 2 koláčiky, t. j. na 8 šatôčok.

Pri takomto postupe hodnotte po 2 bodoch každý z troch uvedených krokov.

Iné riešenie. Spotrebu sliviek budeme počítat' vo fľašiach:

Keďže jedna fľaša sliviek vystačí na polovicu plechu ovocných rezov, na jeden plech treba dve fľaše. Pre ďalšie použitie tak ostávajú 2 fľaše.

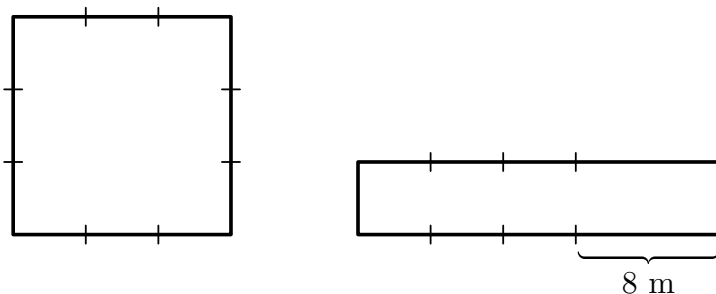
Keďže jedna fľaša vystačí na 4 koláčiky, na 6 koláčikov treba jeden a pol fľaše. Pre ďalšie použitie tak ostáva pol fľaše.

Keďže jedna fľaša vystačí na 16 šatôčok, zo zvyšnej polovice sa dá upiecť 8 šatôčok.

Návrh hodnotenia. 2 body za poznatok, že po upečení plechu zvýšia dve fľaše; 2 body za poznatok, že po upečení ďalších šiestich koláčikov ostane polovica fľaše; 2 body za dopočítanie a záver.

2. *Strýčko Fero mal dve záhrady: mrkvová mala tvar štvorca, jahodová mala tvar obdĺžnika. Pritom šírka jahodovej záhrady bola trikrát menšia ako šírka mrkvovej záhrady a dĺžka jahodovej záhrady bola o 8 metrov väčšia ako dĺžka mrkvovej záhrady. Keď strýčko záhrady oplotil, zistil, že obe mali rovnaký obvod. Určte rozmery mrkvovej a jahodovej záhrady.* (Erika Novotná)

Riešenie. Jahodová záhrada bola štvorcová, preto jej dĺžka bola rovnaká ako jej šírka, a tento rozmer bol rovný trojnásobku šírky jahodovej záhrady. Zo zadania navyše vieme, že dĺžka jahodovej záhrady bola o 8 metrov väčšia ako trojnásobok jej šírky.



Obvody oboch záhrad vyjadrené pomocou šírky jahodovej záhrady teda boli

$$\text{obvod mrkvovej záhrady} = 12 \times \text{šírka jahodovej záhrady},$$

$$\text{obvod jahodovej záhrady} = 8 \times \text{šírka jahodovej záhrady} + 16 \text{ metrov}.$$

Keďže obe záhrady mali rovnaký obvod, platilo, že

$$12 \times \text{šírka jahodovej záhrady} = 8 \times \text{šírka jahodovej záhrady} + 16 \text{ metrov}.$$

Z toho vyplýva, že šírka jahodovej záhrady bola $16 : 4 = 4$ metre. Teda rozmery mrkvovej záhrady boli 12×12 metrov a rozmery jahodovej záhrady boli 20×4 metre.

Návrh hodnotenia. 2 body za vyjadrenie dĺžky jahodovej záhrady pomocou jej šírky; 2 body za vyjadrenie obvodov oboch záhrad; 1 bod za vyjadrenie šírky jahodovej záhrady; 1 bod za rozmery oboch záhrad.

3. *Jeden mesiac mal štyri pondelky, päť nedeľ a jeden piatok trinásteho. Na ktorý deň v týždni pripadol toho roku Nový rok? Ktorým dňom v týždni bude Nový rok v roku nasledujúcom?* (Marta Volfová)

Riešenie. Keďže v piatok bolo 13., muselo byť v nedeľu 15. a v pondelok 16. Na nedele tak pripadajú dátumy 1., 8., 15., 22., 29. a na pondelky pripadajú dátumy 2., 9., 16., 23., prípadne 30. Keďže v uvažovanom mesiaci bolo päť nedeľ a štyri pondelky, mal tento mesiac práve 29 dní, jednalo sa teda o február v priestupnom roku.

Z predchádzajúceho vieme, že 1. februára bola nedeľa, preto 31. januára bola sobota. Ostatné januárové soboty boli 24., 17., 10. a 3. Nový rok v uvažovanom roku teda bol vo štvrtok.

Priestupný rok má 366 dní, t.j. 52 plných týždňov a dva dni navyše ($366 = 52 \cdot 7 + 2$). Nový rok v nasledujúcom roku teda bude v sobotu.

Návrh hodnotenia. 3 body za zistenie, že sa jednalo o február v priestupnom roku; 2 body za zistenie, že Nový rok v uvažovanom roku bol vo štvrtok; 1 bod za zistenie, že Nový rok v nasledujúcom roku bude v sobotu.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, E. Patáková, K. Pazourek, M. Petrová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Erika Novotná, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016