65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie opravených riešení okresných kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 19. februára.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: `skmo.sk`. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu `skmo@skmo.sk` v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke `skmo.sk/dokument.php?id=429` nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov. Inými slovami, napr. nepíšte pri žiakovi, že skončil na 2. mieste, ak pred ním skončili traja žiaci s plným počtom bodov a on má o jeden bod menej – v takom prípade mu patrí 4. miesto.

---

1. *V Zverimexe vypredávali rybičky z jedného akvária. Ondrej chcel polovicu všetkých rybičiek, ale aby nemuseli žiadnu rybičku deliť, dostal o polovicu rybičky viac, ako požadoval. Matej si želal polovicu zvyšných rybičiek, ale rovnako ako Ondrej dostal o polovicu rybičky viac, ako požadoval. Nakoniec Petrík chcel polovicu zvyšných rybičiek, ale tiež dostal o polovicu rybičky viac, ako požadoval. Potom bolo akvárium bez rybičiek. Koľko rybičiek bolo pôvodne v akváriu a koľko ich dostal Ondrej, koľko Matej a koľko Petrík?* (Marta Volfová)

Riešenie. Budeme uvažovať odzadu:

Petrík dostal o polovicu rybičky viac, ako bola polovica všetkých rybičiek, ktoré zvýšili po Matejovi. Keďže potom bolo akvárium prázdne, bola oná polovica rybičky navyše práve polovicou toho, čo zvýšilo po Matejovi. Po Matejovom nákupe teda ostala v akváriu jedna rybička.

Matej dostal o polovicu rybičky viac, ako bola polovica všetkých rybičiek, ktoré zvýšili po Ondrejovi. Keďže potom ostala v akváriu jedna rybička, bola táto rybička a polovica rybičky navyše práve polovicou toho, čo zvýšilo po Ondrejovi. Po Ondrejovom nákupe ostali v akváriu tri rybičky.

Ondrej dostal o polovicu rybičky viac, ako bola polovica všetkých rybičiek, ktoré boli pôvodne v akváriu. Keďže potom ostali v akváriu tri rybičky, boli tieto tri rybičky a polovica rybičky navyše práve polovicou pôvodného množstva rybičiek. Pôvodne bolo v akváriu sedem rybičiek. Teda Ondrej dostal štyri rybičky, Matej dve a Petrík jednu rybičku.

Návrh hodnotenia. 1 bod za určenie zvyšku po Matejovi; 2 body za určenie zvyšku po Ondrejovi; 3 body za určenie pôvodného množstva a počtov rybičiek, ktoré si odniesli jednotliví chlapci.

Iné riešenie. Ak pôvodný počet rybičiek v akváriu označíme x, tak môžeme ďalšie počty postupne vyjadriť takto:

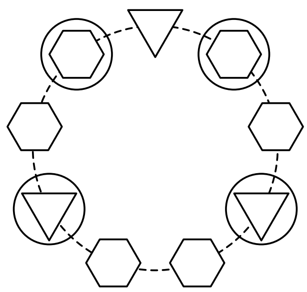
	dostal	zvýšilo
Ondrej	$\frac{x+1}{2}$	$\frac{x-1}{2}$
Matej	$\frac{x+1}{4}$	$\frac{x-3}{4}$
Petrík	$\frac{x+1}{8}$	$\frac{x-7}{8}$

Z toho je zrejmé, že po Petríkovom nákupe mohlo byť akvárium bez rybičiek vtedy a len vtedy, keď $x = 7$. Dosadením ľahko určíme počty rybičiek, ktoré si odniesli jednotliví chlapci.

Návrh hodnotenia. 2 body za predposledný riadok tabuľky; 2 body za posledný riadok tabuľky; 1 bod za vyčíslenie neznámej; 1 bod za počty rybičiek pre jednotlivých chlapcov.

---

2. *Zuzka vpísala do deviatich políčok na nasledujúcom obrázku celé čísla od 1 do 9, každé práve raz. Pomer súčtov čísel napísaných v kruhoch, trojuholníkoch a šesťuholníkoch bol* 2 : 3 : 6. *Zistite, aké číslo mohlo byť napísané v hornom trojuholníku; určte všetky možnosti.* (*Erika Novotná*)



Riešenie. Súčet všetkých čísel vpísaných do políčok na obrázku je rovný

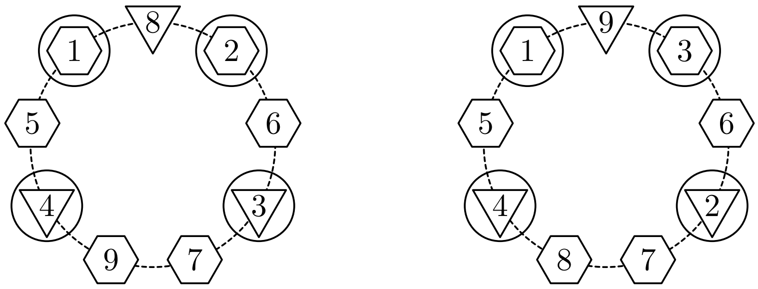
$$1 + 2 + \cdots + 9 = 45.$$

Čísla v trojuholníkoch a čísla v šesťuholníkoch sú navzájom rôzne a pomer ich súčtov je $3 : 6 = 1 : 2$. Z toho vyplýva, že súčet čísel v trojuholníkoch je 15 a súčet čísel v šesťuholníkoch je 30. Keďže pomer súčtov čísel v kruhoch a v trojuholníkoch je $2 : 3$, súčet čísel v kruhoch je 10.

Na obrázku sú štyri kruhy, teda v kruhoch musia byť čísla 1, 2, 3 a 4 (akákoľvek iná štvorica by mala súčet väčší ako 10). Z týchto štyroch čísel sú dve obsiahnuté aj v trojuholníkoch – vo zvyšnom hornom trojuholníku má byť také číslo, aby súčet týchto troch čísel bol 15. Najväčší možný súčet čísel v dvoch spodných trojuholníkoch je 7, preto najmenšie možné číslo v hornom trojuholníku je 8. Súčasne v hornom trojuholníku nemôže byť väčšie číslo ako 9:

- ak je v hornom trojuholníku číslo 8, tak v spodných dvoch trojuholníkoch musia byť čísla 3 a 4,
- ak je v hornom trojuholníku číslo 9, tak v spodných dvoch trojuholníkoch musia byť čísla 2 a 4.

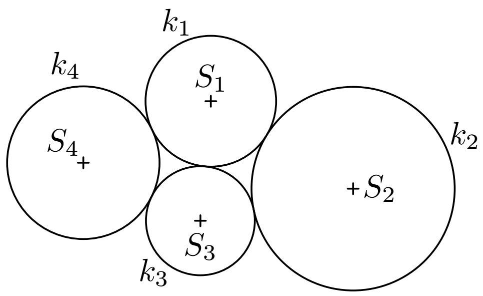
V oboch prípadoch možno ľahko doplniť ostatné čísla tak, že sú splnené všetky požiadavky zo zadania, pozri obrázky. V hornom trojuholníku mohlo byť vpísané číslo 8 alebo 9.



Návrh hodnotenia. 2 body za vyjadrenie súčtov čísel v trojuholníkoch a šesťuholníkoch; 1 bod za vyjadrenie štvorice čísel v kruhoch; 2 body za určenie dvoch možných čísel v hornom trojuholníku; 1 bod za doplnenie obrázka a overenie.

---

3. *Dané sú kružnice k_1, k_2, k_3 a k_4 so stredmi postupne S_1, S_2, S_3 a S_4. Kružnice k_1 a k_3 sa zvonka dotýkajú všetkých ostatných kružníc, polomer kružnice k_1 je 5 cm, vzdialenosť stredov S_2 a S_4 je 24 cm a štvoruholník $S_1S_2S_3S_4$ je kosoštvorec. Určte polomery kružníc k_2, k_3 a k_4.*
Poznámka. Obrázok je len ilustračný. (Eva Semerádová)

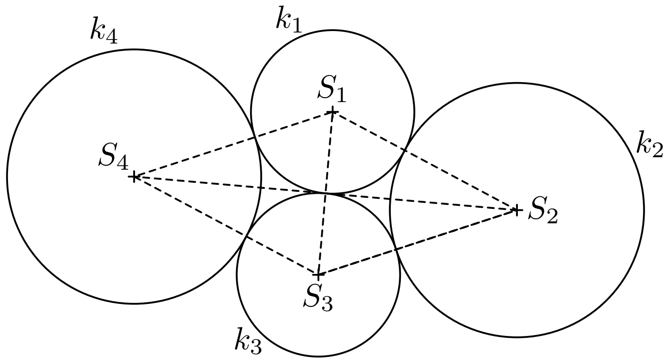


Riešenie. Na obrázku je znázornené jediné možné usporiadanie kružníc, ktoré vyhovuje všetkým podmienkam zo zadania.

Keďže sa kružnice dotýkajú, sú dĺžky strán štvoruholníka $S_1S_2S_3S_4$ rovné súčtom polomerov prislúchajúcich kružníc. Keďže je tento štvoruholník kosoštvorcom, sú všetky jeho strany zhodné. Teda

$$s = r_1 + r_2 = r_2 + r_3 = r_3 + r_4 = r_4 + r_1,$$

pričom r_1, r_2, r_3, r_4 sú veľkosti polomerov prislúchajúcich kružníc a s je veľkosť strany kosoštvorca. Z toho vyplýva, že protiľahlé kružnice sú navzájom zhodné, teda $r_1 = r_3$ a $r_2 = r_4$. Uhlopriečky v kosoštvorci sú na seba kolmé a navzájom sa rozpoľujú. Preto sú trojuholníky určené stranami a uhlopriečkami kosoštvorca pravouhlé a navzájom zhodné.



Odvesny majú podľa zadania veľkosti $r_1 = r_3 = 5\,\mathrm{cm}$ a $\frac{1}{2}|S_2S_4| = 12\,\mathrm{cm}$. Veľkosť prepony, t. j. veľkosť strany kosoštvorca, je podľa Pytagorovej vety rovná

$$s = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13\,(\mathrm{cm}).$$

Z toho vyplýva, že

$$r_2 = r_4 = 13 - 5 = 8\,(\mathrm{cm}).$$

Polomery kružníc k_1 a k_3 sú $5\,\mathrm{cm}$, polomery kružníc k_2 a k_4 sú $8\,\mathrm{cm}$.

Návrh hodnotenia. 3 body za zistenie a zdôvodnenie, že $r_1 = r_3$ a $r_2 = r_4$; 2 body za určenie strany kosoštvorca; 1 bod za určenie polomerov r_2 a r_4.

---

4. *Pred každé z čísel v nasledujúcich dvoch zoznamoch doplňte buď znamienko plus, alebo mínus tak, aby hodnota takto zapísaných výrazov bola rovná nule:*

a) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10,

b) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11.

Pri oboch úlohách uveďte aspoň jedno riešenie alebo zdôvodnite, že úloha riešenie nemá.

(*M. Volfová*)

Riešenie. Aby bol výsledok rovný nule, musí byť súčet všetkých čísel so znamienkom plus rovnaký ako súčet všetkých čísel so znamienkom mínus. Z toho vyplýva, že súčet všetkých uvedených čísel musí byť párny.

V prípade a) je celkový súčet

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55.$$

Keďže je tento súčet nepárny, úloha nemá riešenie.

V prípade b) je celkový súčet

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 11 = 66.$$

Ako čísla so znamienkom plus, tak čísla so znamienkom mínus preto musia mať súčet 33. Jedno z mnohých možných riešení úlohy je napr.

$$+1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 - 11.$$

Návrh hodnotenia. 3 body za zistenie, že celkový súčet musí byť párny; 1 bod za zistenie, že úloha a) nemá riešenie; 2 body za nájdenie jedného riešenia úlohy b).

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, E. Patáková, K. Pazourek, M. Petrová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Erika Novotná, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016