65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016

Riešenia úloh školského kola kategórie B

---

1. *Koľkými spôsobmi je možné vyplniť štvorcovú tabuľku 3×3 číslami 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 tak, aby súčet čísel v každom štvorci 2×2 tejto tabuľky bol rovný 14?*

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Najskôr zistíme, ako sa dá zapísať číslo 14 ako súčet štyroch z daných čísel. Keďže $4+3\cdot 3 < 14 < 4\cdot 4$, musí taký súčet obsahovať aspoň dve a nanajvýš tri štvorky. Dostávame tak práve dve možné vyjadrenia: $14 = 4+4+3+3$ a $14 = 4+4+4+2$.

Predpokladajme, že tabuľku 3×3 máme správne vyplnenú danými číslami, a skúmajme, čo pre ňu musí platiť. Vieme, že každý zo štyroch štvorcov 2×2 musí obsahovať buď čísla 4, 4, 4, 2, alebo čísla 4, 4, 3, 3. Sústreďme sa na štvorce 2×2, ktoré obsahujú číslo 2; pre také štvorce máme iba nasledujúce štyri možnosti:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2&4\\\hline 4&4\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 4&2\\\hline 4&4\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 4&4\\\hline 2&4\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 4&4\\\hline 4&2\\\hline\end{array}$$

V ktorom políčku tabuľky 3×3 môže byť zapísané číslo 2? Ak by bolo zapísané v strednom políčku, museli by byť vo všetkých ostatných políčkach štvorky a neostalo by miesto pre trojky:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \;&\;&\;\\\hline &2&\\\hline &&\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&4&\;\\\hline 4&2&\\\hline &&\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&4&4\\\hline 4&2&4\\\hline &&\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&4&4\\\hline 4&2&4\\\hline 4&4&\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&4&4\\\hline 4&2&4\\\hline 4&4&4\\\hline\end{array}$$

Ak by bolo číslo 2 zapísané uprostred krajného riadka či stĺpca tabuľky, v susedných políčkach by museli byť štvorky, ktorých znova nemáme dostatok:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \;&2&\;\\\hline &&\\\hline &&\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&2&\;\\\hline 4&4&\\\hline &&\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&2&4\\\hline 4&4&4\\\hline &&\\\hline\end{array}$$

Preto sú (obe) čísla 2 zapísané v rohoch tabuľky.

Ak by boli dvojky v protiľahlých rohoch, znova nevystačíme so štvorkami:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \;&\;&2\\\hline &&\\\hline 2&&\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline \;&\;&2\\\hline 4&4&\\\hline 2&4&\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline \;&4&2\\\hline 4&4&4\\\hline 2&4&\\\hline\end{array}$$

Zostala teda jediná možnosť pre polohu čísel 2 – musia byť v susedných rohoch. Následne doplníme samé štvorky do dvoch štvorcov 2×2, ktoré obsahujú tieto dvojky a do zvyšných políčok nám nezostáva iná možnosť ako vpísať zvyšné tri trojky.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&\;&2\\\hline &&\\\hline &&\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&2\\\hline 4&4&\;\\\hline &&\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&2\\\hline 4&4&4\\\hline &&\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&2\\\hline 4&4&4\\\hline 3&3&3\\\hline\end{array}$$

Dostaneme tak prvé riešenie, v ktorom je súčet čísel vo všetkých štyroch štvorcoch 2×2 naozaj rovný 14. Ďalšie tri riešenia dostaneme voľbou inej dvojice susedných rohov. Existujú tak štyri možnosti, ako tabuľku vyplniť:

$$
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&2\\\hline 4&4&4\\\hline 3&3&3\\\hline\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&4&2\\\hline 3&4&4\\\hline 3&4&2\\\hline\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline 4&4&4\\\hline 2&4&2\\\hline\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&3\\\hline 4&4&3\\\hline 2&4&3\\\hline\end{array}
$$

Iné riešenie. Rovnako ako v predošlom riešení ukážeme, že číslo 14 je možné z daných čísel získať ako súčet štyroch čísel iba ako $4+4+4+2$ alebo $4+4+3+3$. Z toho ďalej vyplýva, že v každom štvorci 2×2, ktorý obsahuje číslo 2 (alebo 3) už žiadna dvojka byť nemôže. V prostrednom štvorčeku (ktorý je súčasťou štyroch štvorcov 2×2) nemôže byť ani číslo 2 (neostalo by miesto pre trojky), ani číslo 3 (neostalo by miesto pre dvojky). V prostrednom políčku musí teda byť číslo 4.

Z predošlého riešenia vieme, že v políčku susediacom stranou s prostredným štvorčekom nemôže byť číslo 2, lebo by oba štvorce 2×2 obsahujúce túto dvojku obsahovali už iba štvorky, a tých nemáme dostatok. Uprostred musí teda byť číslo 4 a v jednom z rohov číslo 2. Tým sú určené čísla v zodpovedajúcom štvorci 2×2 tabuľky:

$$
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&&\\\hline &4&\\\hline &&\\\hline\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&\\\hline 4&4&\\\hline &&\\\hline\end{array}
$$

Zostalo nám päť nevyplnených políčok, ktoré majú obsahovať čísla 2, 3, 3, 3, 4. Číslo 3 sa musí vyskytovať v aspoň jednom z dvoch štvorcov 2×2, ktoré majú s už vyplneným štvorcom dve spoločné políčka (a to dvakrát). Zvoľme jeden z nich (pri voľbe druhého bude postup úplne rovnaký a situácia symetrická). Ostatné čísla potom môžeme vpísať už iba jediným spôsobom, keďže číslo 2 nemôže byť v rovnakom štvorci 2×2 s číslom 3:

$$
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&3\\\hline 4&4&3\\\hline &&\\\hline\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&3\\\hline 4&4&3\\\hline 2&&\\\hline\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&3\\\hline 4&4&3\\\hline 2&4&\\\hline\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&3\\\hline 4&4&3\\\hline 2&4&3\\\hline\end{array}
$$

Otočením o násobok 90° dostaneme ďalšie tri odlišné vyplnenia. Ľahko nahliadneme, že sú to všetky možnosti, ktoré dostaneme inou voľbou počiatočného rohu s dvojkou a voľbou priľahlého štvorca s dvoma trojkami. Tabuľku možno teda vyplniť štyrmi spôsobmi.

Iné riešenie. Označme čísla vo vyplnenej tabuľke podľa obrázka písmenami od a po i a spíšme rovnice pre jednotlivé štvorce 2×2:

$$
\begin{array}{|c|c|c|}\hline a&b&c\\\hline d&e&f\\\hline g&h&i\\\hline\end{array}
\quad\longrightarrow\quad
\begin{aligned}
a+b+d+e&=14, &&(1)\\
b+c+e+f&=14, &&(2)\\
d+e+g+h&=14, &&(3)\\
e+f+h+i&=14. &&(4)
\end{aligned}
$$

Riešme túto sústavu rovníc, keď vieme, že čísla od a po i sú v niektorom poradí dve dvojky, tri trojky a štyri štvorky. Číslo e sa nachádza vo všetkých štyroch rovniciach. Ak by bolo $e = 2$, mala by sústava rovníc (1)–(4) tvar

$$\begin{aligned} a + b + d &= 12, \\ b + c + f &= 12, \\ d + g + h &= 12, \\ f + h + i &= 12, \end{aligned}$$

pričom jediný spôsob, akým možno zo zvyšných čísel 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 súčtom troch dostať číslo 12, je $4 + 4 + 4$, a tak by museli všetky ostatné čísla mať iba hodnotu 4, čo nie je možné.

Ak by bolo $e = 3$, mala by sústava rovníc (1)–(4) tvar

$$\begin{aligned} a + b + d &= 11, \\ b + c + f &= 11, \\ d + g + h &= 11, \\ f + h + i &= 11, \end{aligned}$$

pričom jediný spôsob, akým možno zo zvyšných čísel 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4 súčtom troch dostať číslo 11, je $4 + 4 + 3$, a tak by museli všetky ostatné čísla mať iba hodnoty 4 a 3, čo nie je možné (nemáme kam umiestniť dvojky).

Zistili sme, že musí byť $e = 4$, a tak budeme hľadať riešenie sústavy

$$\begin{aligned} a + b + d &= 10, \\ b + c + f &= 10, \\ d + g + h &= 10, \\ f + h + i &= 10, \end{aligned}$$

pričom čísla a, b, c, d, f, g, h, i sú v niektorom poradí čísla 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4. Ak tieto štyri rovnice sčítame, dostaneme

$$\begin{aligned} (a + b + d) + (b + c + f) + (d + g + h) + (f + h + i) &= 40, \\ (a + b + c + d + f + g + h + i) + b + d + f + h &= 40, \\ (2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4) + b + d + f + h &= 40, \\ b + d + f + h &= 15. \qquad (5) \end{aligned}$$

Jediný spôsob, ako dostať číslo 15 ako súčet štyroch čísel z množiny $\{2, 3, 4\}$, je $4+4+4+3$. Preto jediné riešenie rovnice (5) je také, že jedno z čísel b, d, f, h je rovné trom a zvyšné sú štvorky. Pre každú zo štyroch možností už z rovníc (1)–(4) spolu s $e = 4$ jednoznačne dopočítame riešenia $a = 10 - b - d$, $c = 10 - b - f$, $g = 10 - d - h$, $i = 10 - f - h$, ktoré zodpovedajú týmto tabuľkám:

3	3	3
4	4	4
2	4	2

3	4	2
3	4	4
3	4	2

2	4	3
4	4	3
2	4	3

2	4	2
4	4	4
3	3	3

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak riešiteľ postupuje prvým spôsobom, dajte 1 bod za nájdenie oboch možných rozkladov $14 = 4+4+4+2 = 4+4+3+3$, druhý bod za vylúčenie dvojky v strede štvorca 3×3, tretí bod za vylúčenie dvojky „uprostred strany" štvorca 3×3. Štvrtý bod dajte za zistenie, že dvojky nemôžu byť v protiľahlých rohoch, piaty bod za prvé nájdené riešenie a posledný bod za vypísanie všetkých štyroch riešení.

Ak riešiteľ postupuje druhým spôsobom, dajte 1 bod za nájdenie $14 = 4+4+4+2 = 4+4+3+3$, 2 body za určenie čísla 4 v strede štvorca 3×3. Štvrtý bod dajte za zistenie, že dvojky nemôžu byť „uprostred strany", piaty bod za prvé nájdené riešenie a posledný bod za vypísanie všetkých štyroch riešení.

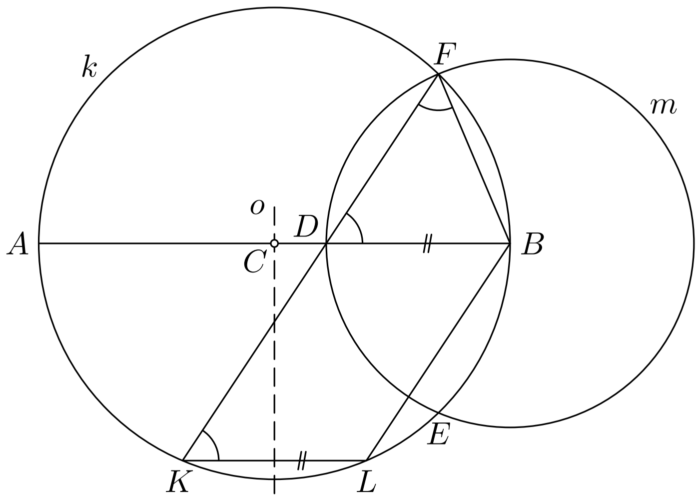
Ak riešiteľ postupuje tretím spôsobom, dajte 3 body za zistenie hodnoty $e = 4$. Štvrtý bod dajte za sčítanie rovníc, piaty bod za objav rovnice (5) a posledný bod za vypísanie všetkých štyroch riešení. Ak riešiteľ neuvedie štyri riešenia, dajte nanajvýš 5 bodov. Ak riešiteľ postupuje inak, snažte sa hodnotiť podobné míľniky v riešení v súlade s uvedenými riešeniami.

---

2. *Daná je úsečka AB, jej stred C a vnútri úsečky AB bod D. Kružnice $k(C, |BC|)$ a $m(B, |BD|)$ sa pretínajú v bodoch E a F a polpriamka FD pretína kružnicu k v bode K, $K \neq F$. Rovnobežka s priamkou AB prechádzajúca bodom K pretína kružnicu k v bode L, $L \neq K$. Dokážte, že $|KL| = |BD|$.* (*Šárka Gergelitsová*)

Riešenie. Body D aj F ležia na kružnici m so stredom B, takže trojuholník BDF je rovnoramenný a platí $|\measuredangle BFK| = |\measuredangle BDF| > 45°$, pretože trojuholník BDF je navyše ostrouhlý (obr. 1). To ale znamená, že bod K musí ležať v polrovine oA, pričom o je os úsečky AB, pretože oblúk BK prislúcha obvodovému uhlu väčšiemu ako 45°.

Bod L, ktorý je vďaka podmienke $AB \parallel KL$ súmerne združený s K podľa o, bude preto ležať v polrovine oB, teda KL a AB (a teda aj DB) budú súhlasne orientované rovnobežné úsečky. Z toho vyplýva zhodnosť súhlasných uhlov LKF a BDF. Spolu tak dostávame $|\measuredangle LKF| = |\measuredangle BDF| = |\measuredangle BFK|$.



Obr. 1

Priamky FB a KL sú potom súmerne združené podľa osi úsečky FK, ktorá prechádza stredom C kružnice k, a je teda aj jej osou súmernosti. Preto aj priesečníky B a L týchto priamok s kružnicou k sú súmerne združené podľa tejto osi, takže štvoruholník $KLBF$ je rovnoramenný lichobežník, čiže $|KL| = |BF|$. Spojením s rovnosťou $|BF| = |BD|$ polomerov kružnice m tak dostávame požadovanú rovnosť

$$|KL| = |BF| = |BD|.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za uvedenie každej z rovností uhlov $|\measuredangle BFK| = |\measuredangle BDF|$ a $|\measuredangle LKF| = |\measuredangle BDF|$ dajte po 2 bodoch. Ďalšími dvoma bodmi odmeňte riešiteľa za dôkaz toho, že $KLBF$ je rovnoramenný lichobežník, resp. za to, že $|KL| = |BF|$. Poznatok, že body B a L ležia na rovnakej strane od priamky KF, možno považovať za očividný, a tak môže byť v riešení využitý mlčky.

---

3. *Dané sú dve rôzne reálne čísla a, b väčšie ako 1. Zapíšte všetky možné poradia hodnôt výrazov*

$$1+a, \quad 1+b, \quad 1+\frac{a+b}{2}, \quad \frac{a^2+b^2-2}{a+b-2}$$

od najmenšej po najväčšiu. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Najskôr si všimnime, že zámenou hodnôt a a b sa hodnota posledných dvoch uvažovaných výrazov nezmení, zatiaľ čo poradie prvých dvoch sa zmení na opačné. Čísla a a b sú rôzne, môžeme preto predpokladať, že je $a < b$. Pre $a > b$ tak výmenou čísel a a b medzi sebou dostaneme už niektoré nájdené poradie, v ktorom budú vymenené hodnoty $1 + a$ a $1 + b$.

Keďže čísla a a b sú rôzne, leží ich aritmetický priemer medzi nimi, takže pre $a < b$ je vždy

$$1+a < 1+\frac{a+b}{2} < 1+b.$$

Ostáva zistiť, na ktoré miesto sa dá (za uvedeného predpokladu) zaradiť hodnota posledného výrazu. Napríklad pre $a = 2$ a $b = 4$ máme zaradiť hodnotu 4,5 medzi čísla $3 < 4 < 5$. Vidíme teda, že jedno z možných usporiadaní všetkých štyroch uvažovaných hodnôt je

$$1+a < 1+\frac{a+b}{2} < \frac{a^2+b^2-2}{a+b-2} < 1+b. \tag{1}$$

Ako sme už uviedli skôr, prvá nerovnosť platí za predpokladu $a < b$ vždy. Ukážeme, že ďalšie dve nerovnosti v (1) tiež platia všeobecne pre ľubovoľné a, b, $1 < a < b$.

Každú z oboch nerovností vynásobíme kladným výrazom $a+b-2$. Ekvivalentnými úpravami ľavej nerovnosti ďalej dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{2+a+b}{2}\cdot(a+b-2) &< a^2+b^2-2,\\ (a+b)^2-4 &< 2(a^2+b^2-2),\\ 0 &< a^2+b^2-2ab,\\ 0 &< (a-b)^2, \end{aligned}$$

čo je nerovnosť, ktorá pre $a \neq b$ platí vždy.

Úpravou pravej nerovnosti potom dostaneme

$$\begin{aligned} a^2+b^2-2 &< (1+b)(a+b-2),\\ a^2+b^2-2 &< a+b-2+ab+b^2-2b,\\ 0 &< -a^2+ab+a-b,\\ 0 &< a(b-a)-(b-a) = (b-a)(a-1), \end{aligned}$$

čo vďaka nerovnostiam $1 < a < b$ platí tiež.

Vzhľadom na symetriu spomenutú v úvode tak dostávame dve možné usporiadania uvažovaných hodnôt:

$$1+a<1+\frac{a+b}{2}<\frac{a^2+b^2-2}{a+b-2}<1+b, \quad \text{keď } a<b,$$
$$1+b<1+\frac{a+b}{2}<\frac{a^2+b^2-2}{a+b-2}<1+a, \quad \text{keď } b<a.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za správnu pozíciu hodnoty $1+(a+b)/2$ medzi číslami $1+a$ a $1+b$ dajte 1 bod. Dôkaz každej z ďalších dvoch nerovností (1) oceňte dvoma bodmi. Posledný bod dajte za uvedenie oboch možných usporiadaní.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016