65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016 *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

---

1. *Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$, pre ktoré platí $\overline{abcd} = 20 \cdot \overline{ab} + 16 \cdot \overline{cd}$.*
(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. V rovnici zo zadania

$$1\,000a + 100b + 10c + d = 20(10a + b) + 16(10c + d)$$

majú neznáme cifry a a b väčšie koeficienty na ľavej strane, zatiaľ čo cifry c a d na strane pravej. Preto rovnicu upravíme na tvar $800a + 80b = 150c + 15d$, ktorý po vydelení piatimi a vyňatí menších koeficientov oboch strán prepíšeme ako

$$16(10a + b) = 3(10c + d). \tag{1}$$

Z toho vďaka nesúdeliteľnosti čísel 3 a 16 vyplýva, že $10c + d$ je dvojciferný násobok čísla 16. Ten je však väčší ako 48, lebo $3 \cdot 48 = 144$, zatiaľ čo $16(10a + b) \geqq 160$ (cifra a musí byť nenulová). Ako hodnoty $10c + d$ tak prichádzajú do úvahy iba násobky 16 rovné 64, 80 a 96 – čísla určujúce svojim zápisom cifry c a d. Dosadením do rovnice (1) dostaneme pre dvojciferné číslo $10a + b$ postupne hodnoty 12, 15 a 18.

Odpoveď. Vyhovujú tri čísla 1 264, 1 580 a 1 896.

Poznámka. Namiesto štyroch neznámych cifier a, b, c, d možno na zápis rovnice zo zadania využiť zrejme priamo obe dvojciferné čísla $x = \overline{ab}$ a $y = \overline{cd}$. Rovnica potom bude mať tvar $100x + y = 20x + 16y$, ktorý podobne ako v pôvodnom postupe upravíme na $80x = 15y$, čiže $16x = 3y$. Teraz namiesto vzťahu $16 \mid y$ môžeme využiť druhý podobný dôsledok $3 \mid x$ a uvedomiť si, že z odhadu $y \leqq 99$ vyplýva $16x \leqq 3 \cdot 99 = 297$, odkiaľ $x \leqq 18$, čo spolu s odhadom $x \geqq 10$ vedie k možným hodnotám $x \in \{12, 15, 18\}$. Z rovnice $16x = 3y$ potom už dopočítame $y = 64$ pre $x = 12$, $y = 80$ pre $x = 15$ a $y = 96$ pre $x = 18$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, logicky správny postup s numerickými chybami (podľa ich miery) oceňte nanajvýš 4 bodmi. Pri nedokončenom postupe dajte 1 bod za zápis zadanej rovnice v rozvinutom tvare (t. j. s mocninami základu 10), za jeho úpravu na súčinový tvar s nesúdeliteľnými činiteľmi 16 a 3 potom tiež 1 bod.

---

2. *Pri stole sedí niekoľko ľudí (aspoň dvaja) a hrajú takúto hru: V každom kole tajným hlasovaním každý hráč udelí hlas jednému hráčovi (môže aj sám sebe). Potom sa kolo vyhodnotí: každý hráč, ktorý dostal práve jeden hlas, z hry vypadáva.*

a) Koľko ľudí mohlo sedieť pri stole na začiatku, ak v prvom kole vypadol z hry práve jeden hráč?

b) Mohla mať hra jediného víťaza, teda človeka, ktorý po určitom počte kôl zostal v hre sám?

(*Róbert Tóth*)

Riešenie. a) Ukážeme, že v opísanej situácii mohol na začiatku pri stole sedieť ľubovoľný počet ľudí väčší ako 2. Dvaja hráči to totiž byť nemohli (to by v prvom kole vypadli z hry buď obaja, alebo žiadny z nich, rozdelenie dvoch hlasov je totiž buď 1 : 1, alebo 2 : 0).

Ak sú na začiatku hráči aspoň traja, tak v prvom kole vypadne iba jeden hráč A, keď napríklad hráč A dá hlas sebe a všetci ostatní (sú najmenej dvaja) ho dajú tomu istému hráčovi B, $B \neq A$ (teda aj hráč B dá hlas sebe). Nie je to samozrejme jediný spôsob hlasovania s požadovaným výsledkom.

b) Vysvetlíme, prečo jediný hráč v hre nikdy zostať nemôže. Opak by znamenal, že v poslednom kole pred uvedenou situáciou, keď v hre bolo povedzme m hráčov, pričom $m > 1$, by v dôsledku ich hlasovania vypadlo $m - 1$ hráčov. Keďže pri tomto hlasovaní bolo rozdaných práve m hlasov a $m - 1$ hráčov (tí, čo potom vypadli) dostalo práve jeden hlas, musel aj zvyšný m-tý hráč dostať práve jeden (zvyšný) hlas, a teda tiež vypadnúť, a to je spor.

Za úplné riešenie časti a) dajte 2 body, za úplné riešenie časti b) dajte 4 body. Za drobné argumentačné nedostatky strhnite $1-2$ body.

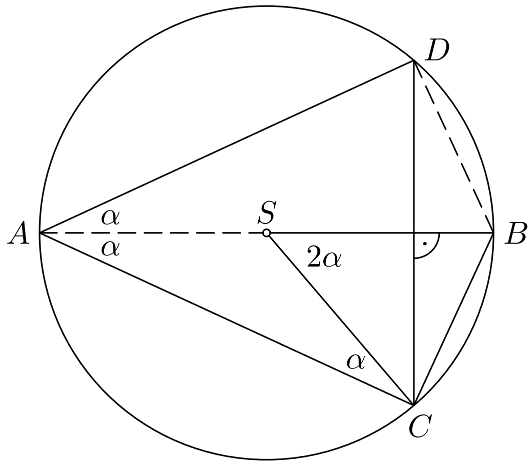
---

3. *V kružnici so stredom S zostrojíme priemer AB a ľubovoľnú naň kolmú tetivu CD. Zdôvodnite, prečo je obvod trojuholníka ACD menší ako dvojnásobok obvodu trojuholníka SBC.* (Šárka Gergelitsová)

Riešenie. Želaný vzťah medzi obvodmi trojuholníkov ACD a SBC vyplynie, keď pre dĺžky ich strán objavíme nerovnosti

$$|AC| < 2|SB|, \quad |AD| < 2|SC| \quad \text{a} \quad |CD| < 2|BC|.$$

Prvé dve z nich sú dôsledkom toho, že tetivy AC a AD danej kružnice sú kratšie ako jej priemer AB (obr. 1), tretia nerovnosť zapísaná v tvare $\frac{1}{2}|CD| < |BC|$ je nerovnosťou medzi dĺžkami odvesny a prepony dvoch zhodných pravouhlých trojuholníkov, na ktoré je trojuholník BCD rozdelený priamkou AB, ktorá je totiž (vďaka predpokladu $AB \perp CD$) osou tetivy CD. Dodajme, že rovnako dobre možno využiť aj trojuholníkovú nerovnosť $|CD| < |BC| + |BD| = 2|BC|$.



Obr. 1

Iné riešenie. Označme α veľkosti vnútorných uhlov pri základni AC rovnoramenného trojuholníka SAC. Potom jeho vonkajší uhol pri vrchole S, čiže uhol CSB, má veľkosť 2α, ktorú má aj uhol CAD, pretože polpriamka AB je jeho osou (obr. 1).

Rovnoramenné trojuholníky ACD a SCB sa tak zhodujú vo vnútorných uhloch pri svojich hlavných vrcholoch A a S, a sú teda podobné. Preto je pomer ich obvodov rovný pomeru dĺžok ich ramien, a ten má naozaj hodnotu menšiu ako 2, lebo ramená trojuholníka ACD sú kratšie ako priemer danej kružnice, zatiaľ čo ramená trojuholníka SCB majú dĺžku jej polomeru.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za odhad dĺžok AC, AD pomocou priemeru danej kružnice v neúplnom riešení dajte 1 bod. Za nerovnosť $|CD| < 2|BC|$ dajte 1 bod, len ak je zdôvodnená; ak chýba toto zdôvodnenie v inak úplnom riešení, strhnite 1 bod. Napokon 1 bod dajte aj za objav, že trojuholníky ACD a SCB sú podobné. Len za zmienku o ich rovnoramennosti však žiadny bod neudeľujte.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016