

2008/2009

58. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie A

(Termín odovzdania: v pondelok 24. novembra 2008.)

1. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$2 \sin x \cos(x + y) + \sin y = 1,$$

$$2 \sin y \cos(y + x) + \sin x = 1.$$

(Jaroslav Švrček)

2. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Dokážte, že spojnica priesečníkov výšok trojuholníka ABC s priesečníkom výšok trojuholníka ABD je rovnobežná s priamkou CD .

(Tomáš Jurík)

3. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y také, že $\frac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo.

(Ján Mazák)

4. Uvažujme nekonečnú aritmetickú postupnosť

$$a, a + d, a + 2d, \dots, \quad (*)$$

kde a, d sú prirodzené (t. j. kladné celé) čísla.

- Nájdite príklad postupnosti (*), ktorá obsahuje nekonečne veľa k -tych mocnín prirodzených čísel pre všetky $k = 2, 3, \dots$
- Nájdite príklad postupnosti (*), ktorá neobsahuje žiadnu k -tu mocninu prirodzeného čísla pre žiadne $k = 2, 3, \dots$
- Nájdite príklad postupnosti (*), ktorá neobsahuje žiadnu druhú mocninu prirodzeného čísla, ale obsahuje nekonečne veľa tretích mocnín prirodzených čísel.
- Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla a, d, k ($k > 1$) platí: Postupnosť (*) buď neobsahuje žiadnu k -tu mocninu prirodzeného čísla, alebo obsahuje nekonečne veľa k -tych mocnín prirodzených čísel.

(Jaroslav Zhouf)

5. V každom vrchole pravidelného 2008-uholníka leží jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom všetky mince postupne presunúť:

- na 8 kôpok po 251 minciach,
- na 251 kôpok po 8 minciach.

(Radek Horenský)

6. Daný je trojuholník ABC . Vnútri strán AC, BC sú dané body E, D tak, že $|AE| = |BD|$. Označme M stred strany AB a P priesečník priamok AD a BE . Dokážte, že obraz bodu P v stredovej súmernosti so stredom M leží na osi uhla ACB .

(Ján Mazák)