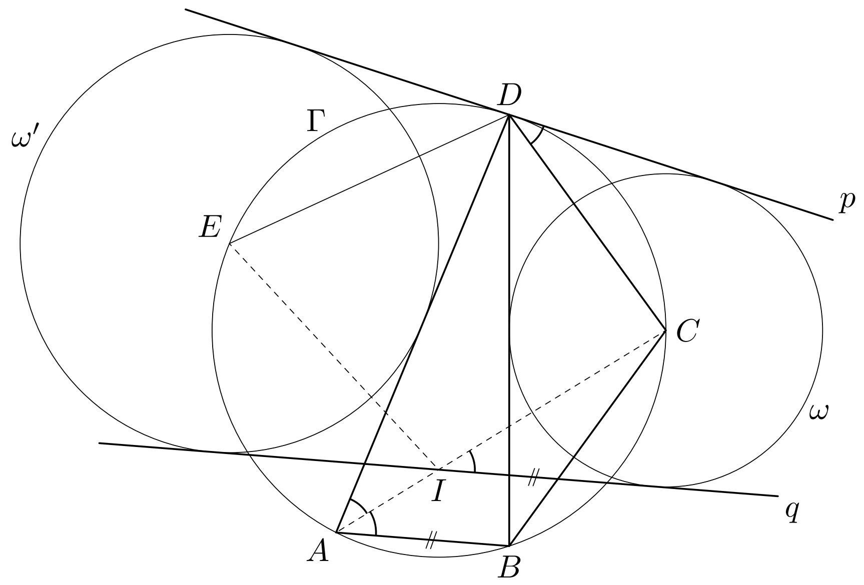
62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

1. *Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$, pričom $|BC| = |CD|$. Nech ω je kružnica so stredom C dotýkajúca sa uhlopriečky BD. Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD. Dokážte, že priamka prechádzajúca bodom I, ktorá je rovnobežná s AB, sa dotýka kružnice ω.* (*Kamil Duszenko*)

Riešenie. Označme Γ kružnicu opísanú štvoruholníku $ABCD$ a p priamku, ktorá sa dotýka kružnice Γ v bode D. Keďže C je stredom oblúka BD, z úsekových a obvodových uhlov máme $|\measuredangle(CD, p)| = |\measuredangle CAD| = |\measuredangle BAC| = |\measuredangle BDC|$, a teda priamka p sa dotýka aj kružnice ω. Podobne ak označíme E stred oblúka DA kružnice Γ, dostaneme, že p sa dotýka kružnice ω', ktorá má stred E a dotýka sa strany DA. Preto priamka q, ktorá je obrazom priamky p v osovej súmernosti podľa priamky CE, sa tiež dotýka kružníc ω a ω' (obr. 1). Pritom zo známych vzťahov[1] $|CD| = |CI|$ a $|ED| = |EI|$ dostávame, že aj body D a I sú súmerne združené podľa priamky CE. Takže I leží na priamke q a zostáva dokázať, že $q \parallel AB$. To vyplýva z rovností

$$|\measuredangle(q, IC)| = |\measuredangle(CD, p)| = |\measuredangle CAD| = |\measuredangle BAC|$$

(všetky používané uhly dvoch priamok považujeme za orientované).



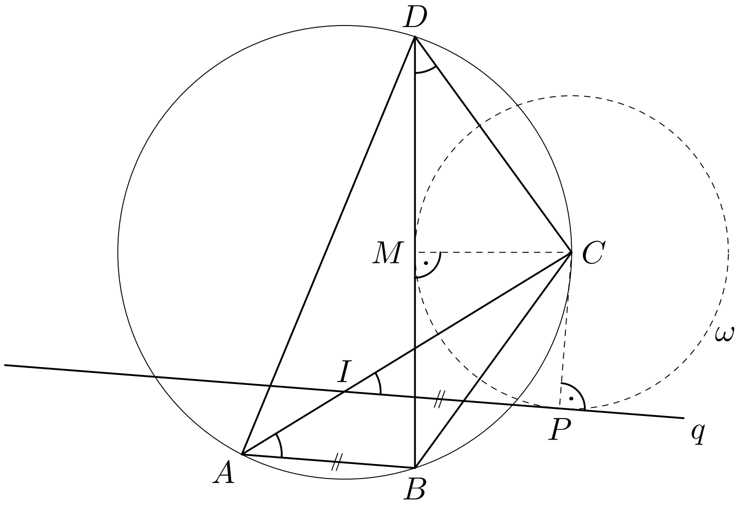
Obr. 1

Iné riešenie. Označme q priamku, ktorá prechádza bodom I a je rovnobežná s AB. Nech P päta kolmice z bodu C na q a M je stred BD (obr. 2). Zo súhlasných a obvodových uhlov dostávame

$$|\measuredangle CIP| = |\measuredangle CAB| = |\measuredangle CDB| = |\measuredangle CDM|.$$

[1] Je známe, že stred kružnice vpísanej danému trojuholníku leží na kružnici, ktorá má stred v strede oblúka kružnice opísanej a prechádza krajnými bodmi tohto oblúka. Tento fakt možno ľahko nahliadnuť pomocou obvodových uhlov, keďže osi vnútorných uhlov trojuholníka, na ktorých stred vpísanej kružnice leží, pretínajú kružnicu opísanú práve v stredoch oblúkov určených vrcholmi trojuholníka.

Keďže $|CD| = |CI|$, sú pravouhlé trojuholníky CDM a CIP zhodné podľa vety *usu*, odkiaľ $|CM| = |CP|$. Z toho už priamo vyplýva dokazované tvrdenie.



Obr. 2

---

2. *Dokážte, že pre každé reálne číslo $x > 0$ a každé celé číslo $n > 0$ platí*

$$x^n + \frac{1}{x^n} - 2 \geqq n^2\Bigl(x + \frac{1}{x} - 2\Bigr).$$

(*Kamil Duszenko*)

Riešenie. Pre $x = 1$ zrejme platí rovnosť. Ďalej bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $y = \sqrt{x} > 1$. Vzhľadom na identitu

$$a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = \Bigl(a - \frac{1}{a}\Bigr)^2$$

stačí dokázať nerovnosť

$$y^n - \frac{1}{y^n} \geqq n\Bigl(y - \frac{1}{y}\Bigr),$$

ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou $y^{2n} - n(y^{n+1} - y^{n-1}) - 1 \geqq 0$. Jej ľavú stranu vydelíme kladným výrazom $y - 1$ a upravíme na tvar, z ktorého bude jej kladnosť zrejmá:

$$\frac{y^{2n} - 1}{y - 1} - \frac{ny^{n-1}(y^2 - 1)}{y - 1} = \sum_{i=0}^{2n-1} y^i - n(y^{n-1} + y^n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(y^{2n-1-i} - y^n - y^{n-1} + y^i) = \sum_{i=0}^{n-1} y^i(y^{n-1-i} - 1)(y^{n-i} - 1) \geqq 0.$$

3. *Pre každé racionálne číslo r uvažujme tvrdenie: Ak x je reálne číslo také, že čísla $x^2 - rx$ a $x^3 - rx$ sú obe racionálne, tak x je tiež racionálne.*

a) Dokážte tvrdenie pre $r \geqq \frac{4}{3}$ a pre $r \leqq 0$.

b) Nech p, q sú rôzne nepárne prvočísla také, že $3p < 4q$. Dokážte, že tvrdenie pre $r = \frac{p}{q}$ neplatí.

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. a) Nech čísla $s = x^2 - rx$ a $t = x^3 - rx$ sú racionálne. Úpravami dostávame

$$x^2 = s + rx, \quad x^3 = x^2 \cdot x = (s + rx)x = sx + rx^2 = sx + r(s + rx) = \big(r^2 + s\big)x + rs,$$

a teda

$$t = x^3 - rx = \big(\big(r^2 + s\big)x + rs\big) - rx = \big(r^2 - r + s\big)x + rs.$$

Ak $(r^2 - r + s) \neq 0$ (čiže ak $x^2 - rx + r^2 - r \neq 0$), tak číslo

$$x = \frac{t - rs}{r^2 - r + s}$$

je racionálne.

Odvodili sme, že dané tvrdenie platí práve vtedy, keď rovnica

$$x^2 - rx + r^2 - r = 0 \tag{1}$$

nemá žiadne iracionálne korene. Dodajme, že pre ľubovoľný koreň x rovnice (1) sú hodnoty s a t racionálne:

$$s = x^2 - rx = r - r^2 \quad \text{a} \quad t = 0 \cdot x + rs = rs = r\big(r - r^2\big).$$

Pokiaľ diskriminant $D = r(4 - 3r)$ rovnice (1) je menší alebo rovný 0, tá nemá reálne korene alebo má jediný koreň $x = \frac{1}{2}r$, ktorý je racionálny. Keďže $D \leqq 0$ nastáva práve vtedy, keď $r \geqq \frac{4}{3}$ alebo $r \leqq 0$, prvá časť úlohy je vyriešená.

b) Podľa výsledkov prvej časti stačí ukázať, že $D > 0$ a číslo $\sqrt{D}$ je iracionálne. Po úprave máme

$$D = r(4 - 3r) = \frac{p}{q}\left(4 - \frac{3p}{q}\right) = \frac{p(4q - 3p)}{q^2} > 0.$$

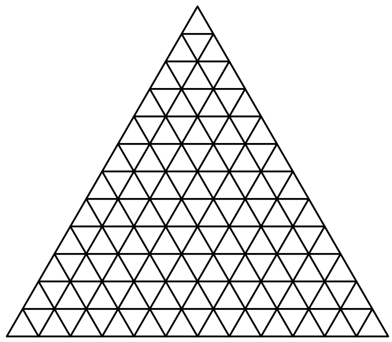
Keďže $p \nmid 4q$, je výraz $p(4q - 3p)$ deliteľný prvočíslom p, nie však jeho druhou mocninou, preto tento výraz nie je druhou mocninou prirodzeného čísla a číslo $\sqrt{D} = \sqrt{p(4q - 3p)}/q$ je iracionálne.

4. *Nech a, b sú celé čísla, pričom b nie je druhou mocninou celého čísla. Dokážte, že $x^2 + ax + b$ môže byť druhou mocninou celého čísla len pre konečne veľa celočíselných hodnôt x.*

(*Martin Panák*)

Riešenie. Uvažujme diofantickú rovnicu $x^2 + ax + b = y^2$ s neznámymi x a y. Tú možno upraviť na tvar $(2x + 2y + a)(2x - 2y + a) = a^2 - 4b$. Keďže b nie je druhou mocninou celého čísla, je $a^2 - 4b \neq 0$. Existuje len konečne veľa spôsobov zápisu čísla $a^2 - 4b$ v tvare súčinu dvoch celých čísel. Z každého takého rozkladu dostaneme dve nezávislé lineárne rovnice s neznámymi x, y, ktoré majú nanajvýš jedno celočíselné riešenie. Preto existuje len konečne veľa takých x.

5. *Trojuholníková sieť rozdeľuje rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky n na n^2 trojuholníkových buniek (obr. 3). Niektoré bunky sú infikované. Bunka, ktorá zatiaľ nie je infikovaná, sa infikuje, ak susedí (stranou) s aspoň dvoma už infikovanými bunkami. Určte pre $n = 12$ najmenší možný počet na začiatku infikovaných buniek, pri ktorom je možné, že po čase budú infikované všetky bunky pôvodného trojuholníka.*



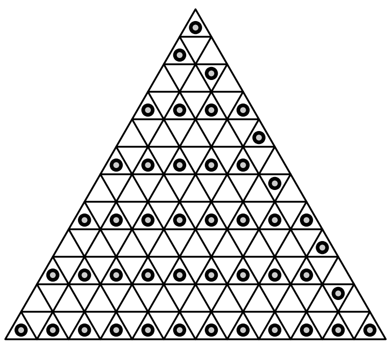
Obr. 3

(*Radek Horenský*)

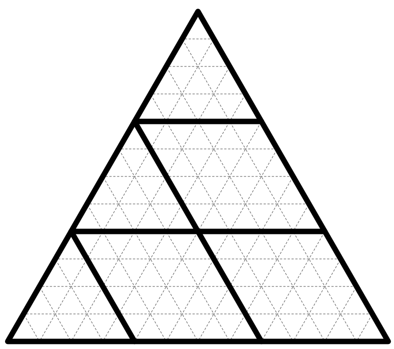
Riešenie. Všimnime si, že pri infikovaní jednej bunky sa obvod infikovanej plochy zmenší aspoň o 1. Nech je na začiatku infikovaných k buniek. Potom obvod infikovanej plochy je nanajvýš $3k$. Na infikovanie všetkých buniek potrebujeme $n^2 - k$ infikovaní a obvod infikovanej plochy sa pritom zmení na $3n$. Preto $3n \leqq 3k - (n^2 - k)$, odkiaľ

$$k \geqq \frac{n^2 + 3n}{4}.$$

Pre $n = 12$ z tohto odhadu dostávame $k \geqq 45$. Jedno možné rozloženie 45 na začiatku infikovaných buniek, ktoré stačia na infikovanie celého systému, je znázornené na obr. 4.

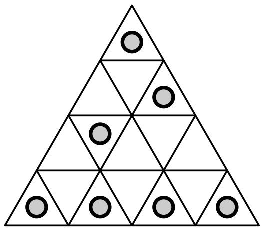


Obr. 4

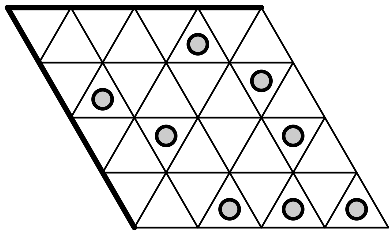


Obr. 5

Inou možnosťou je pokrytie trojuholníka tromi menšími rovnostrannými trojuholníkmi a tromi kosoštvorcami ako na obr. 5. Na infikovanie každého z menších trojuholníkov stačí 7 buniek, na každý kosoštvorec stačí 8 buniek. Možné počiatočné rozloženia infikovaných buniek sú na obr. 6a a 6b. (Každý trojuholník sa celý infikuje nezávisle na tom, čo sa udeje mimo neho. Pre infikovanie celých kosoštvorcov potrebujeme, aby boli infikované plochy „naľavo“ od nich a „nad“ nimi, čo zabezpečia infikované trojuholníky.)



Obr. 6a

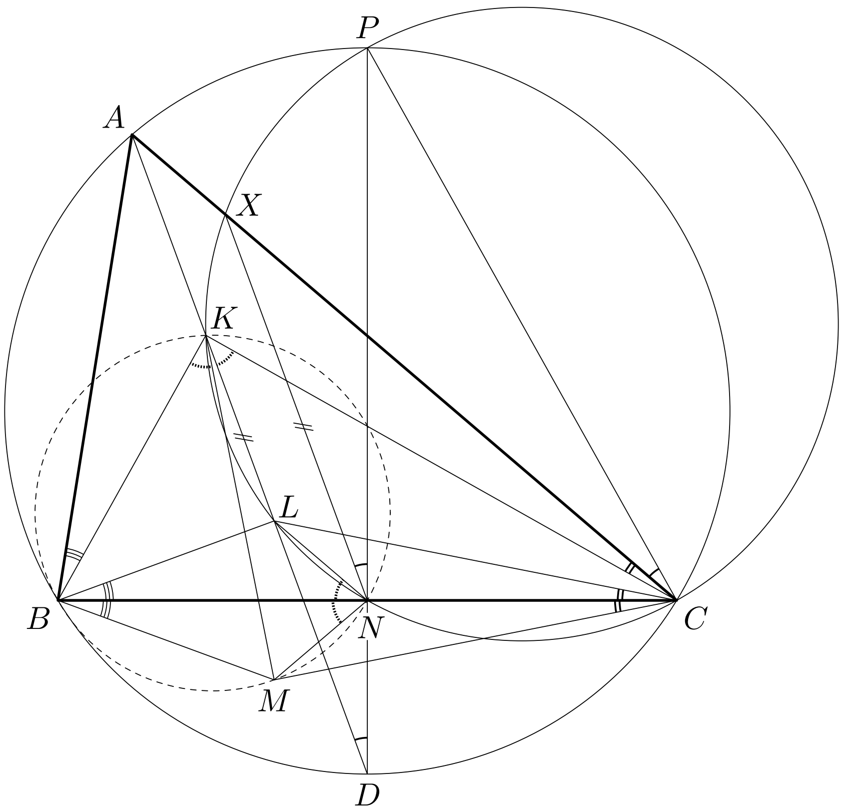


Obr. 6b

---

6. *Daný je trojuholník ABC a jemu opísaná kružnica. Bod P je stredom oblúka BAC. Kružnica s priemerom CP pretína os uhla BAC v bodoch K, L ($|AK| < |AL|$). Bod M je obrazom bodu L v osovej súmernosti podľa priamky BC. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku BKM prechádza stredom úsečky BC.* (Dominik Burek, Tomasz Cieśla)

Riešenie. Označme D stred oblúka BC, N stred strany BC a X pätu kolmice z bodu P na stranu AC. Body X, K, L, N ležia na Tálesovej kružnici s priemerom PC (obr. 7). Z obvodových uhlov máme $|\measuredangle PNX| = |\measuredangle PCA| = |\measuredangle PDA|$, preto $XN \parallel KL$. Odtiaľ



Obr. 7

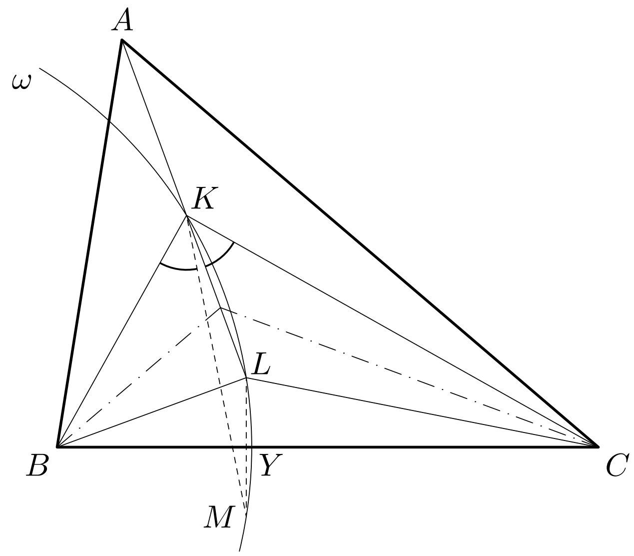
$|LN| = |KX|$, z čoho vyplýva $|\measuredangle LCN| = |\measuredangle KCA|$. Keďže $|\measuredangle BAK| = |\measuredangle LAC|$, sú body

K, L izogonálne združené[2] vzhľadom na trojuholník ABC. Z toho dostávame

$$|\measuredangle MBC| = |\measuredangle CBL| = |\measuredangle KBA| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle BCM| = |\measuredangle LCB| = |\measuredangle ACK|.$$

To znamená, že body A, M sú izogonálne združené vzhľadom na trojuholník KBC. S využitím tetivového štvoruholníka $CKLN$ preto $|\measuredangle BNM| = |\measuredangle LNB| = |\measuredangle LKC| = |\measuredangle BKM|$, a teda body B, M, N, K ležia na jednej kružnici.

Iné riešenie. V predošlom riešení sme ukázali, že body K, L sú izogonálne združené vzhľadom na trojuholník ABC. Preto osi uhlov CBA a BCA sú zároveň osami uhlov LBK a KCL. Zo známeho tvrdenia o tom, v akom pomere delí v trojuholníku os uhla protiľahlú stranu, máme $|BK|/|BL| = |KC|/|LC|$. To znamená, že body K, L ležia na Apollóniovej kružnici ω prislúchajúcej bodom B, C. Keďže ω je súmerne združená podľa priamky BC, leží na nej aj bod M (obr. 8). Označme Y priesečník kružnice ω so stranou BC. Potom KY je zároveň osou uhla MKL (pretože Y je stredom oblúka LM) aj uhla BKC (pretože K leží na Apollóniovej kružnici). Odtiaľ $|\measuredangle BKM| = |\measuredangle LKC|$ a dôkaz môžeme dokončiť podobne ako v prvom riešení.



Obr. 8

[2] Ak Z je daný bod ležiaci mimo priamok určených stranami trojuholníka ABC, tak obrazy priamok ZA, ZB, ZC v osových súmernostiach postupne podľa osí vnútorných uhlov trojuholníka pri vrcholoch A, B, C sa pretínajú v jednom bode – o ňom hovoríme, že je *izogonálne združený* s bodom Z vzhľadom na trojuholník ABC.