62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh IMO*

1. *Dokážte, že ku každej dvojici kladných celých čísel k a n existuje k kladných celých čísel $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (nie nutne rôznych) takých, že*

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

(*Japonsko*)

Riešenie. Postupujme indukciou vzhľadom na k. Pre $k=1$ je tvrdenie zrejmé. Pre k väčšie ako 1 použijeme dva typy rozkladu podľa parity n. Ak n je nepárne, teda $n = 2t-1$ pre nejaké kladné celé číslo t, tak

$$1+\frac{2^k-1}{n}=1+\frac{2^k-1}{2t-1}=\left(1+\frac{2^{k-1}-1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{2t-1}\right).$$

Ak n je párne, teda $n=2t$ pre nejaké kladné celé číslo t, tak

$$1+\frac{2^k-1}{n}=1+\frac{2^k-1}{2t}=\left(1+\frac{2^{k-1}-1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{2t+2^k-2}\right).$$

Hľadané $m_1, \ldots, m_{k-1}$ dostaneme z indukčného predpokladu pre $n=t$ z prvej zátvorky. Stačí už len položiť $m_k=2t-1$ v prvom prípade a $m_k=2t+2^k-2$ v druhom prípade (zrejme $2t+2^k-2>0$).

2. *Konfigurácia 4027 bodov v rovine sa nazýva kolumbijská, ak pozostáva z 2013 červených a 2014 modrých bodov a žiadne tri body tejto konfigurácie neležia na jednej priamke. Ak nakreslíme niekoľko priamok, rovina sa rozdelí na niekoľko oblastí. Rozloženie priamok je dobré pre kolumbijskú konfiguráciu, ak sú splnené dve nasledovné podmienky:*

- *žiadna priamka neprechádza žiadnym bodom konfigurácie;*
- *žiadna oblasť neobsahuje body oboch farieb.*

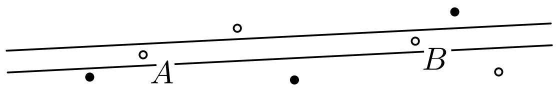
Nájdite najmenšiu hodnotu k takú, že pre každú kolumbijskú konfiguráciu 4027 bodov existuje dobré rozloženie k priamok. (*Austrália*)

Riešenie. Ukážeme, že hľadaná najmenšia hodnota je 2013.

V prvej časti riešenia uvedieme kolumbijskú konfiguráciu, pre ktorú neexistuje dobré rozloženie s menej ako 2013 priamkami. Rozostavme na kružnicu striedavo 2013 červených a 2013 modrých bodov. Zvyšný jeden bod zvoľme ľubovoľne tak, aby spĺňal podmienky zadania. Takto sme rozdelili kružnicu na 4026 disjunktných oblúkov, pričom pri dobrom rozložení každý z nich musí byť preťatý aspoň raz nejakou priamkou, aby boli oddelené jeho rôznofarebné konce. Keďže však každá priamka pretína kružnicu najviac dvakrát a priesečníkov potrebujeme aspoň je 4026, minimálny počet priamok v dobrom rozložení je $4026/2 = 2013$.

V druhej časti dokážeme, že na vytvorenie dobrého rozloženia stačí pre každú kolumbijskú konfiguráciu 2013 priamok. Použijeme jednoduchý trik $\mathcal{T}$: Majme dva body

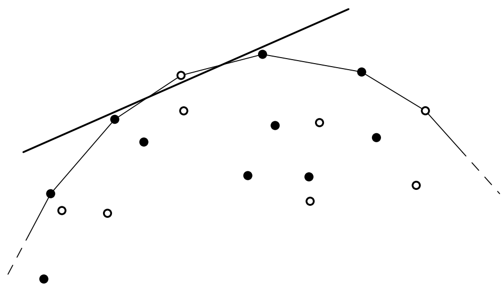
A a B s rovnakou farbou. Z dvoch priamok rovnobežných s priamkou AB zostrojme pás obsahujúci oba tieto body. Pretože žiadne tri body konfigurácie neležia na jednej priamke a bodov je konečne veľa, vieme pás urobiť dostatočne úzky tak, aby okrem bodov A a B neobsahoval žiadne ďalšie body konfigurácie (obr. 1).



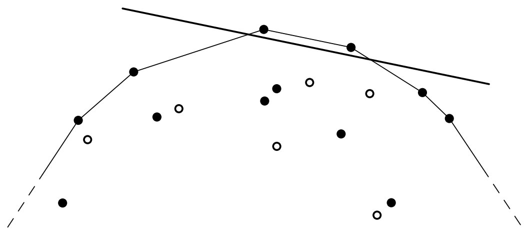
Obr. 1

Uvažujme teraz ľubovoľnú kolumbijskú konfiguráciu a zostrojme konvexný obal jej bodov. Rozlíšime dva prípady.

- ▷ Ak konvexný obal obsahuje aspoň jeden červený bod, tak jednou priamkou vieme tento bod oddeliť od všetkých ostatných bodov (obr. 2a). Zvyšných 2012 červených bodov zoskupíme ľubovoľne do dvojíc a na každú dvojicu použijeme trik $\mathcal{T}$. Stačí nám teda $1 + 2 \cdot (2012/2) = 2013$ priamok.
- ▷ Ak konvexný obal obsahuje iba modré body, zoberieme z neho ľubovoľné dva susedné body (t. j. niektoré susedné vrcholy mnohouholníka tvoriaceho konvexný obal), tie oddelíme jednou priamkou (obr. 2b) a zvyšných 2012 modrých bodov zoskupíme do dvojíc, na ktoré aplikujeme trik $\mathcal{T}$. Opäť nám stačí 2013 priamok.



Obr. 2a



Obr. 2b

---

3. *Nech kružnica pripísaná k strane BC trojuholníka ABC sa dotýka strany BC v bode A_1. Definujme body B_1 na CA a C_1 na AB analogicky, použijúc pripísané kružnice k stranám CA a AB. Predpokladajme, že stred kružnice opísanej trojuholníku $A_1B_1C_1$ leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. Dokážte, že trojuholník ABC je pravouhlý.* (Rusko)

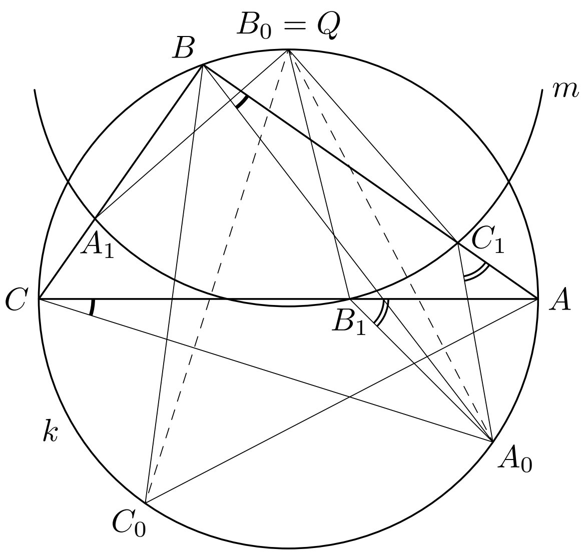
Riešenie. Označme k a m kružnice opísané trojuholníkom ABC a $A_1B_1C_1$. Nech A_0 je stred oblúka CB kružnice k obsahujúceho A; B_0 a C_0 definujeme analogicky. Podľa zadaného predpokladu stred kružnice m, ktorý označíme Q, leží na k.

Lema. Platí $|A_0B_1| = |A_0C_1|$. Body A, A_0, B_1, C_1 ležia na jednej kružnici, pričom body A, A_0 ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou B_1C_1. Rovnaké tvrdenie platí po cyklickej zmene označenia.

Dôkaz. Ak $A = A_0$, tak trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou BC, čiže $|AB_1| = |AC_1|$ a lema zrejme platí. Predpokladajme ďalej, že $A \neq A_0$.

Z definície bodu A_0 máme $|A_0B| = |A_0C|$. Je známe (a ľahko možno dokázať), že $|BC_1| = |CB_1|$. Zároveň $|\measuredangle C_1BA_0| = |\measuredangle ABA_0| = |\measuredangle ACA_0| = |\measuredangle B_1CA_0|$. Teda trojuholníky A_0BC_1 a A_0CB_1 sú zhodné. Z toho vyplýva $|A_0C_1| = |A_0B_1|$, čím je dokázaná prvá časť lemy.

Taktiež dostávame $|\measuredangle A_0C_1A| = |\measuredangle A_0B_1A|$, pretože sú to zodpovedajúce si vonkajšie uhly pri vrcholoch C_1 a B_1 v zhodných trojuholníkoch A_0BC_1 a A_0CB_1 (obr. 3). Preto body A, A_0, B_1 a C_1 tvoria tetivový štvoruholník s protiľahlými stranami AA_0 a B_1C_1. Tým je lema dokázaná.



Obr. 3

Evidentne body A_1, B_1 a C_1 ležia vnútri nejakej polkružnice na kružnici m, takže trojuholník $A_1B_1C_1$ je tupouhlý. Bez ujmy na všeobecnosti nech tupý uhol je pri vrchole B_1. Potom Q a B_1 ležia v rôznych polrovinách určených priamkou A_1C_1. To isté platí pre body B a B_1. Dokopy tak dostávame, že body Q a B ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou A_1C_1.

Všimnime si, že os úsečky A_1C_1 pretína kružnicu k v dvoch bodoch v rôznych polrovinách určených priamkou A_1C_1. Keďže B_0 a Q ležia v rovnakej polrovine, podľa prvého tvrdenia lemy sú totožné. Z prvej časti lemy potom zároveň vyplýva, že priamky QA_0 a QC_0 sú postupne osami úsečiek B_1C_1 a A_1B_1. Preto

$$
\begin{aligned}
|\measuredangle C_1B_0A_1| &= |\measuredangle C_1B_0B_1| + |\measuredangle B_1B_0A_1| = 2|\measuredangle A_0B_0B_1| + 2|\measuredangle B_1B_0C_0| = \\
&= 2|\measuredangle A_0B_0C_0| = 180^\circ - |\measuredangle ABC|.
\end{aligned}
$$

Posledná úprava vyplýva z toho, že A_0 a C_0 sú stredmi oblúkov CB a BA – pri zvyčajnom označení veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka ABC totiž oblúk C_0B kružnice k zodpovedá stredovému uhlu $180^\circ - \gamma$ a oblúk A_0B stredovému uhlu $180^\circ - \alpha$. Oblúk A_0C_0 preto zodpovedá stredovému uhlu $\alpha + \gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - |\measuredangle ABC|$.

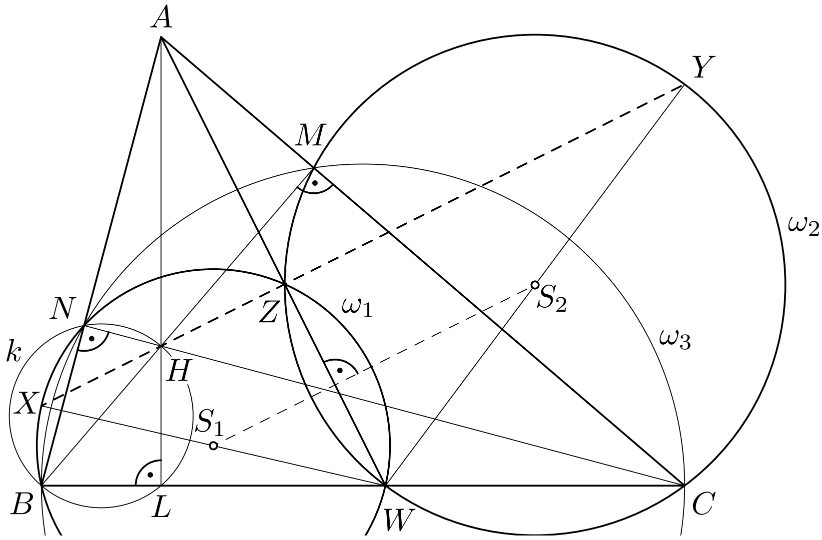
Na druhej strane, z druhej časti lemy máme

$$|\measuredangle C_1B_0A_1| = |\measuredangle C_1BA_1| = |\measuredangle ABC|.$$

Spojením odvodených dvoch rovností dostávame $|\measuredangle ABC| = 90^\circ$.

4. *Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s ortocentrom H a nech W je vnútorný bod strany BC. Body M a N sú postupne päty výšok z bodov B a C. Označme ω_1 kružnicu opísanú trojuholníku BWN a nech X je taký bod na ω_1, že WX je jej priemerom. Analogicky označme ω_2 kružnicu opísanú trojuholníku CWM a nech Y je taký bod na ω_2, že WY je jej priemerom. Dokážte, že body X, Y a H ležia na jednej priamke.* (*Thajsko*)

Riešenie. Stredy kružníc ω_1, ω_2 označme S_1, S_2 a ich priesečník rôzny od W nech je Z. Ďalej označme L pätu výšky z bodu A a ω_3 kružnicu nad priemerom BC, ktorá podľa Tálesovej vety prechádza aj bodmi M a N (obr. 4).



Obr. 4

Potenčným stredom[1] trojice kružníc ω_1, ω_2, ω_3 je priesečník chordál BN a CM, teda bod A. Preto body A, Z, W ležia na jednej priamke – chordále kružníc ω_1 a ω_2. Tá je kolmá na spojnicu stredov S_1S_2, ktorá rozpoľuje úsečku ZW. Pritom úsečka S_1S_2 je strednou priečkou v trojuholníku XWY, takže body X, Z, Y ležia na priamke kolmej na priamku určenú bodmi A, Z, W.

Body B, L, H, N ležia podľa Tálesovej vety na kružnici, označme ju k. Z mocnosti bodu A ku kružniciam k a ω_1 máme $|AL| \cdot |AH| = |AB| \cdot |AN| = |AW| \cdot |AZ|$, preto buď sú úsečky HL a ZW totožné, alebo body L, W, Z, H ležia na jednej kružnici. V prvom prípade $H = Z$, čiže dokazované tvrdenie platí triviálne; v druhom prípade podľa Tálesovej vety $|\angle HZW| = 90°$, odkiaľ taktiež dostávame želaný záver.

5. *Nech $\mathbb{Q}^+$ je množina kladných racionálnych čísel. Nech f: $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$ je funkcia spĺňajúca nasledovné tri podmienky:*

(i) *pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí $f(x)f(y) \geqq f(xy)$;*
(ii) *pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí $f(x+y) \geqq f(x) + f(y)$;*
(iii) *existuje racionálne číslo $a > 1$ také, že $f(a) = a$.*

[1] Je známe, že ak ku každej dvojici kružníc spomedzi danej trojice rôznych po dvoch nesústredných kružníc zostrojíme chordálu, výsledné tri chordály sú buď navzájom rovnobežné, alebo sa pretínajú v jednom bode – tento bod sa potom nazýva *potenčným stredom* danej trojice kružníc.

Dokážte, že $f(x)=x$ pre všetky $x \in \mathbb{Q}^+$. (*Bulharsko*)

Riešenie. Dosadením $x=1$ a $y=a$ do (i) dostaneme $f(1) \geqq 1$. Následne jednoduchou matematickou indukciou z (ii) odvodíme

$$f(nx) \geqq nf(x) \tag{1}$$

pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a všetky $x \in \mathbb{Q}^+$. Špeciálne pre $x=1$ máme

$$f(n) \geqq nf(1) \geqq n \tag{2}$$

pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Podľa (i) platí $f(m/n)f(n) \geqq f(m)$, takže s využitím (2) dostávame $f(q)>0$ pre všetky $q \in \mathbb{Q}^+$. Preto vzťah (ii) implikuje rýdzu rastúcosť funkcie f, vďaka čomu z (2) máme

$$f(x) \geqq f(\lfloor x \rfloor) \geqq \lfloor x \rfloor > x-1$$

pre všetky $x \geqq 1$. Použitím matematickej indukcie zo vzťahu (i) obdržíme $f(x)^n \geqq$ $\geqq f(x^n)$, takže

$$f(x)^n \geqq f(x^n) \geqq x^n - 1 \tag{3}$$

pre všetky $x>1$ a $n \in \mathbb{N}$. Z toho vyplýva nerovnosť

$$f(x) \geqq x \qquad \text{pre všetky } x>1; \tag{4}$$

formálne ju možno dokázať napríklad takto: Uvažujme ľubovoľné číslo $y \in (1,x)$. Potom $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+y^{n-1}) > n(x-y)$, teda pre dostatočne veľké n máme $x^n - 1 > y^n$. Podľa (3) potom $f(x)>y$.

Zo vzťahov (i) a (4) máme $a^n = f(a)^n \geqq f(a^n) \geqq a^n$, takže $f(a^n)=a^n$. Vezmime ľubovoľné $x \geqq 1$ a vyberme k nemu $n \in \mathbb{N}$ také, že $a^n - x > 1$. Potom z (ii) a (4) dostávame

$$a^n = f(a^n) \geqq f(x) + f(a^n - x) \geqq x + (a^n - x) = a^n$$

a preto $f(x)=x$ pre $x \geqq 1$. Napokon pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a všetky $x \in \mathbb{Q}^+$ z (i) a (1) dostávame

$$nf(x) = f(n)f(x) \geqq f(nx) \geqq nf(x),$$

odkiaľ $f(nx)=nf(x)$. Preto $f(m/n)=f(m)/n=m/n$ pre všetky $m,n \in \mathbb{N}$.

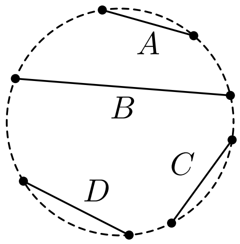
---

6. *Nech $n \geqq 3$ je celé číslo. Uvažujme kružnicu a na nej $n+1$ rovnomerne rozložených bodov. Uvažujme všetky také označenia týchto bodov znakmi $0,1,\dots,n$, že každý znak je použitý práve raz. Dve takéto označenia sa považujú za zhodné, ak jedno z nich je možné dostať z druhého rotáciou kružnice. Označenie sa nazýva krásne, ak pre ľubovoľné štyri znaky $a<b<c<d$ také, že $a+d=b+c$, tetiva spájajúca body označené znakmi a a d nepretína tetivu spájajúcu body označené znakmi b a c. Nech M je počet krásnych označení a nech N je počet usporiadaných dvojíc (x,y) nesúdeliteľných kladných celých čísel takých, že $x+y \leqq n$. Dokážte, že*

$$M = N + 1.$$

(*Rusko*)

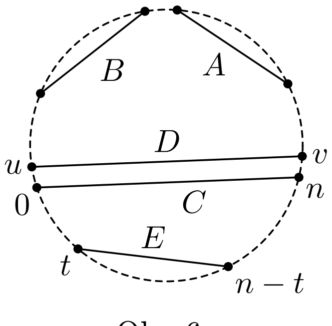
Riešenie. Pre dané krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n\}$ nazveme *k-tetivou* takú (prípadne aj degenerovanú) tetivu, ktorej krajné body majú súčet čísel rovný k. Tri tetivy nazveme *zoradené*, ak jedna z nich oddeľuje zvyšné dve. Skupina viacerých (aspoň štyroch) tetív je zoradená, ak sú každé tri jej tetivy zoradené. Napríklad na obr. 5 trojica tetív A, B, C je zoradená, zatiaľ čo trojica B, C, D nie je.



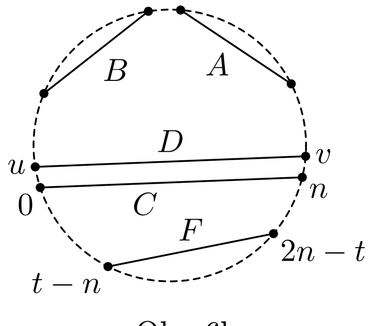
Obr. 5

Lema. V každom krásnom rozložení sú pre ľubovoľné celé číslo k všetky k-tetivy zoradené.

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na n. Pre $n \leqq 3$ je tvrdenie triviálne. Nech teda $n \geqq 4$ a predpokladajme sporom, že tvrdenie neplatí. Uvažujme krásne rozloženie $\mathcal{S}$ s tromi k-tetivami A, B, C, ktoré nie sú zoradené. Ak by číslo n nebolo v žiadnom z krajných bodov tetív A, B, C, tak odstránením n z $\mathcal{S}$ by sme dostali krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, teda A, B, C by boli podľa indukčného predpokladu zoradené. Podobne ak by 0 nebola v žiadnom krajnom bode daných tetív, dostali by sme krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ jej odobratím a zmenšením každého zvyšného čísla o 1. Preto čísla 0 aj n ležia v krajných bodoch uvedených tetív. Zrejme ležia obe v krajných bodoch tej istej tetivy, povedzme C, pretože inak by súčet čísel v krajných bodoch každej tetivy nemohol byť rovnaký ($n + x > 0 + y$ pre každé $x > 0$ a $y < n$).



Obr. 6a



Obr. 6b

Označme D tetivu s krajnými bodmi označenými číslami u a v, ktoré v $\mathcal{S}$ susedia s číslami 0 a n a sú na rovnakej strane od C ako tetivy A a B. Nech $t = u + v$.

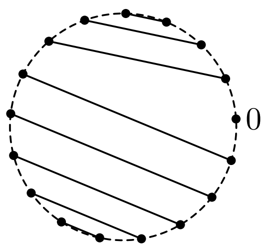
▷ Ak $t = n$, tak tetivy A, B, D sú nezoradené n-tetivy v krásnom rozložení, ktoré vznikne odstránením n z $\mathcal{S}$, čo je spor s indukčným predpokladom.

▷ Ak $t < n$, tak t-tetiva spájajúca body s číslami 0 a t nesmie pretínať tetivu D, takže tetiva C oddeľuje číslo t a tetivu D (obr. 6a). Pritom n-tetiva E spájajúca body s číslami t a $n - t$ nesmie pretínať tetivu C, takže A, B, E sú nezoradené n-tetivy, z čoho dostaneme analogický spor.

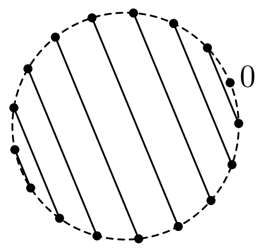
▷ Ak $t > n$, tak t-tetiva spájajúca body s číslami n a $t-n$ nesmie pretínať tetivu D, takže tetiva C oddeľuje číslo $t-n$ a tetivu D (obr. 6b). Pritom n-tetiva F spájajúca body s číslami $t-n$ a $2n-t$ nesmie pretínať tetivu C, takže A, B, F sú nezoradené n-tetivy, čo opäť vedie k sporu.

Tým je lema dokázaná.

Samotné tvrdenie zo zadania budeme dokazovať tiež indukciou. Overiť, že pre $n = 2$ platí, je triviálne. Ďalej uvažujme prípad $n \geqq 3$. Nech $\mathcal{S}$ je ľubovoľné krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n\}$. Po odstránení n dostaneme krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, ktoré označme $\mathcal{T}$. V ňom sú n-tetivy zoradené a ich koncové body obsahujú všetky čísla okrem nuly. Budeme hovoriť, že rozloženie $\mathcal{T}$ je *prvého typu*, ak 0 leží medzi dvomi n-tetivami (obr. 7a). V opačnom prípade (t. j. keď degenerovaná tetiva s koncovými bodmi v čísle 0 je zoradená s ostatnými n-tetivami) je $\mathcal{T}$ rozložením *druhého typu* (obr. 7b). Ukážeme, že každé krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ prvého typu pochádza práve z jedného krásneho rozloženia čísel $\{0, 1, \ldots, n\}$ a každé krásne rozloženie druhého typu pochádza práve z dvoch krásnych rozložení.

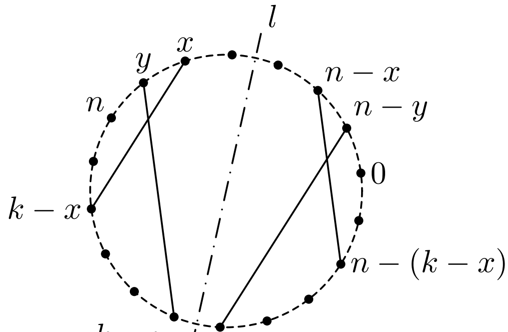


Obr. 7a



Obr. 7b

Ak $\mathcal{T}$ je prvého typu, leží 0 medzi dvoma n-tetivami, povedzme A a B. Keďže tetiva spájajúca čísla 0 a n musí byť v $\mathcal{S}$ zoradená s tetivami A, B, môže číslo n ležať na jedinom mieste – na oblúku medzi A, B na opačnej strane ako 0. Teda existuje jediné rozloženie $\mathcal{S}$, z ktorého mohlo $\mathcal{T}$ vzniknúť. Takto zrekonštruované $\mathcal{S}$ pritom naozaj je krásne. Pre $k < n$ sú totiž všetky k-tetivy v $\mathcal{S}$ zároveň k-tetivami v $\mathcal{T}$, takže sú zoradené. Taktiež n-tetivy sú zrejme v poriadku, pričom vzhľadom na konštrukciu $\mathcal{S}$ vieme, že sú navzájom rovnobežné, t. j. majú spoločnú os, ktorú označme l. To využijeme na zdôvodnenie toho, že aj pre $k > n$ sa žiadne dve k-tetivy nepretínajú. Ak by sa totiž nejaké dve pretínali, tak ich obrazy v osovej súmernosti podľa l by sa tiež pretínali. Avšak číslo x je podľa osi l súmerné s číslom $n - x$, čiže obrazom k-tetív sú $(2n - k)$-tetivy (obr. 8), a pre $k > n$ je $2n - k < n$, čo je v spore s tým, čo sme ukázali pred chvíľou.



Obr. 8

Ak $\mathcal{T}$ je druhého typu, môžeme číslo n vložiť až na dve rôzne pozície – musí susediť s nulou buď z jednej, alebo z druhej strany. To, že obe takto vzniknuté rozloženia sú krásne, sa ukáže rovnako ako pri prvom type.

Označme M_n počet krásnych rozložení čísel $\{0, 1, \ldots, n\}$ a L_n počet tých z nich, ktoré sú druhého typu. Ukázali sme, že

$$M_n = (M_{n-1} - L_{n-1}) + 2L_{n-1} = M_{n-1} + L_{n-1}.$$

Vzhľadom na indukčný predpoklad ostáva dokázať, že hodnota L_{n-1} je rovná počtu usporiadaných dvojíc (x, y) kladných celých čísel takých, že $x + y = n$ a $\operatorname{nsd}(x, y) = 1$, t. j. že $L_{n-1} = \varphi(n)$.[2]

Uvažujme teda ľubovoľné krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ druhého typu. Pozície budeme označovať číslami 0, 1, …, $n-1$ v smere hodinových ručičiek tak, že 0 je na pozícii 0. Pri označovaní pozícií pripúšťame aj čísla mimo intervalu od 0 po $n-1$, pričom ich chápeme modulo n (t. j. pozícia p zodpovedá zvyšku čísla p po delení číslom n). Nech $f(i)$ je číslo na pozícii i. Pozíciu čísla $n-1$ označme a.

Keďže n-tetivy sú zoradené s degenerovanou tetivou majúcou koncové body v čísle 0 a každé číslo okrem nuly je v nejakej n-tetive, sú tieto tetivy všetky rovnobežné, preto

$$f(i) + f(-i) \equiv 0 \pmod{n} \qquad \text{pre všetky } i.$$

Podobne aj $(n-1)$-tetivy sú zoradené a každý bod je v nejakej $(n-1)$-tetive, takže aj tieto tetivy sú všetky rovnobežné a

$$f(i) + f(a-i) = n - 1 \qquad \text{pre všetky } i.$$

Preto $f(a-i) \equiv f(-i) - 1 \pmod{n}$, a keďže $f(0) = 0$, postupným dosadením $i = a, 2a, \ldots$ dostávame

$$f(-ak) \equiv k \pmod{n} \qquad \text{pre všetky } k. \tag{1}$$

Keďže f je permutáciou množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, musia hodnoty $-ak$ pre $k = 0, 1, \ldots, n-1$ pokrývať všetky zvyšky po delení číslom n, čo nastáva, len keď $\operatorname{nsd}(a, n) = 1$. Pritom pre dané a nesúdeliteľné s n už predpis (1) jednoznačne určuje rozloženie všetkých čísel. Odtiaľ $L_{n-1} \leqq \varphi(n)$.

Pre dôkaz rovnosti ostáva ukázať, že rozloženie určené predpisom (1) je krásne pre ľubovoľné a spĺňajúce $\operatorname{nsd}(a, n) = 1$. Nech w, x, y, z sú rôzne čísla z množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, pričom $w + y = x + z$. Ich pozície na kružnici spĺňajú $(-aw) + (-ay) = (-ax) + (-az)$, čo znamená že tetivy z w do y a z x do z sú rovnobežné, a teda sa nepretínajú. Preto uvedené rozloženie je krásne a vzhľadom na konštrukciu je zrejme druhého typu.

[2] Funkcia φ, ktorá prirodzenému číslu n priraďuje počet čísel, ktoré sú menšie alebo rovné n a sú s n nesúdeliteľné, sa nazýva Eulerova funkcia. V teórii čísel je známa veľmi často používaná.