62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh MEMO*

I-1. *Nech a, b a c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí*

$$a+b+c=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Dokážte, že

$$2(a+b+c)\geqq\sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2c+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}.$$

Nájdite všetky trojice (a,b,c), pre ktoré nastáva rovnosť. (Slovensko, Patrik Bak)

Riešenie. Použitím AG-nerovnosti dostávame postupne pre výrazy $\sqrt[3]{7a^2b+1}$, $\sqrt[3]{7b^2c+1}$ a $\sqrt[3]{7c^2a+1}$ odhady

$$\sqrt[3]{7a^2b+1}=2\cdot\sqrt[3]{a\cdot a\cdot\left(\frac{7b}{8}+\frac{1}{8a^2}\right)}\leqq\frac{2}{3}\left(a+a+\frac{7b}{8}+\frac{1}{8a^2}\right),\tag{1}$$

$$\sqrt[3]{7b^2c+1}=2\cdot\sqrt[3]{b\cdot b\cdot\left(\frac{7c}{8}+\frac{1}{8b^2}\right)}\leqq\frac{2}{3}\left(b+b+\frac{7c}{8}+\frac{1}{8b^2}\right),\tag{2}$$

$$\sqrt[3]{7c^2a+1}=2\cdot\sqrt[3]{c\cdot c\cdot\left(\frac{7a}{8}+\frac{1}{8c^2}\right)}\leqq\frac{2}{3}\left(c+c+\frac{7a}{8}+\frac{1}{8c^2}\right).\tag{3}$$

Sčítaním nerovností (1), (2) a (3) dostávame

$$\sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2c+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}\leqq\frac{2}{3}\left(\frac{23(a+b+c)}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right).$$

Dosadením rovnosti zo zadania a pár úpravami dostávame

$$\sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2c+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}\leqq 2(a+b+c).$$

Rovnosť v pôvodnej nerovnosti nastáva práve vtedy, keď nastáva rovnosť v (1), (2) a (3), t. j. pre a, b, c, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$a=\frac{7b}{8}+\frac{1}{8a^2},\qquad b=\frac{7c}{8}+\frac{1}{8b^2},\qquad c=\frac{7a}{8}+\frac{1}{8c^2}.$$

Označme $f(x)=\frac{8}{7}(x-1/(8x^2))$, potom

$$b=f(a),\qquad c=f(b),\qquad a=f(c).$$

Dokážeme, že $f(x)$ je neklesajúca funkcia. Nech $u\geqq v$. Potom

$$f(u)-f(v)=\frac{8}{7}\left((u-v)+\frac{1}{8v^2}-\frac{1}{8u^2}\right)=\frac{8}{7}\left((u-v)+\frac{(u-v)(u+v)}{8u^2v^2}\right)=$$
$$=\frac{8}{7}(u-v)\left(1+\frac{u+v}{8u^2v^2}\right)\geqq 0.$$

Keďže sústava rovníc je cyklická, môžeme predpokladať, že $a = \max\{a, b, c\}$. Z toho postupne dostávame

$$a \geqq b \implies f(a) \geqq f(b) \implies b \geqq c \implies f(b) \geqq f(c) \implies c \geqq a \implies f(c) \geqq f(a).$$

Z toho vyplýva $c \geqq a \geqq b \geqq c$, a teda $a = b = c$.

Ostáva nájsť riešenie pre $f(a) = a$:

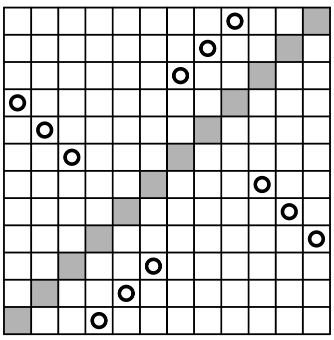
$$\begin{aligned} \frac{8}{7}\left(a - \frac{1}{8a^2}\right) &= a, \\ 8a - \frac{1}{a^2} &= 7a, \\ \frac{1}{a^2} &= a, \\ 1 &= a^3. \end{aligned}$$

Rovnosť nastáva pre $a = b = c = 1$.

I-2. *Nech n je kladné celé číslo. Na šachovnici pozostávajúcej z $4n \times 4n$ políčok je rozmiestnených $4n$ žetónov. Každý riadok a každý stĺpec obsahuje práve jeden žetón. Pri ťahu je žetón presunutý na stranou susediace políčko. Na políčkach môže byť aj viac ako jeden žetón. Cieľom je presunúť žetóny tak, že nakoniec budú umiestnené na všetkých políčkach jednej z dvoch diagonál šachovnice. Určte najmenšie $k(n)$ také, že pre ľubovoľné počiatočné rozloženie žetónov vieme dosiahnuť výsledné rozloženie na najviac $k(n)$ ťahov.* (Nemecko, Bernd Mulansky)

Riešenie. Naším cieľom bude ukázať, že $k(n) = 6n^2$. Definujme vzdialenosť políčka od danej diagonály ako najmenší počet ťahov potrebných na presun z políčka na danú diagonálu. Všimnime si, že táto vzdialenosť je rovnaká ako počet horizontálnych, respektíve vertikálnych ťahov potrebných na presun na danú diagonálu. Pre dané rozloženie žetónov definujeme vzdialenosť rozloženia od danej diagonály ako súčet vzdialeností jednotlivých žetónov od danej diagonály.

Najskôr ukážeme nerovnosť $k(n) \geqq 6n^2$. Zvoľme súradnicový systém tak, že vrcholy šachovnice majú súradnice $\pm 2n$. Žetóny umiestnime na políčka so súradnicami stredu spĺňajúcimi $x > 0$ a $y - x = n$. Túto konfiguráciu doplníme žetónmi tak, aby sme otočením o $90°$ dostali to isté rozloženie. (Prípad pre $n = 3$ je znázornený na obr. 1.) Vzdialenosť takéhoto rozloženia od ľubovoľnej diagonály je $2n \cdot n + 2n \cdot 2n = 6n^2$. Preto $k(n) \geqq 6n^2$.



Obr. 1

Pre opačnú nerovnosť ukážeme, že pre ľubovoľné rozloženie žetónov je súčet vzdialeností od oboch diagonál nanajvýš $12n^2$, čiže $k(n) \leqq 6n^2$.

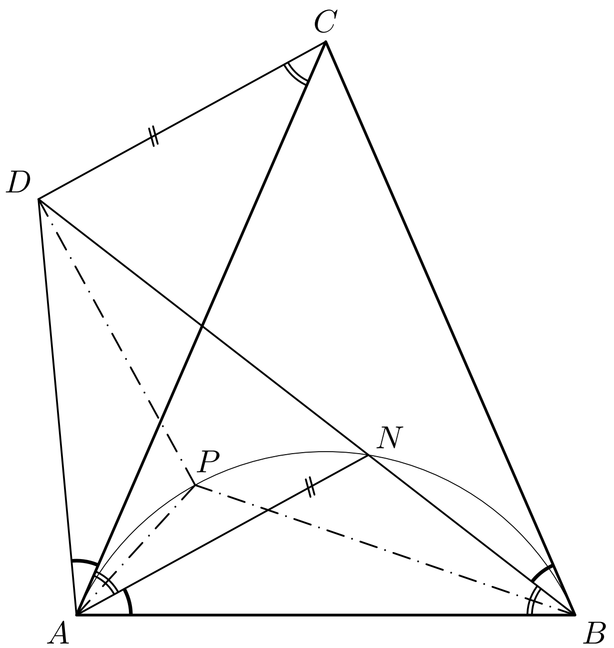
Všimnime si, že súčet vzdialeností žetónu na políčku so stredom (x, y) od oboch diagonál je $2 \cdot \max\{|x|, |y|\}$. Toto číslo môže nadobúdať len hodnoty $1, 3, \ldots, 4n-1$ a každú z týchto hodnôt maximálne štyrikrát. Preto maximálny súčet vzdialeností ľubovoľnej konfigurácie od oboch diagonál je nanajvýš $4((4n-1)+(4n-3)+\ldots+$ $+(2n+1)) = 4n \cdot 3n = 12n^2$.

I-3. *Je daný rovnoramenný trojuholník ABC taký, že $|AC| = |BC|$. Nech N je vnútorný bod trojuholníka ABC, pre ktorý platí*

$$2|\measuredangle ANB| = 180^\circ + |\measuredangle ACB|.$$

Nech D je priesečníkom priamky BN a priamky rovnobežnej s AN prechádzajúcej bodom C. Označme P priesečník osí uhlov CAN a ABN. Dokážte, že priamky DP a AN sú na seba kolmé. (*Chorvátsko, Matija Basić*)

Riešenie. Nech k je taká kružnica, že priamky AC a BC sú jej dotyčnice a dotýkajú sa jej postupne v bodoch A a B. Podmienka zo zadania definujúca bod N implikuje, že N leží na kružnici k.



Obr. 2

Z vety o úsekovom uhle vieme, že $|\measuredangle BAN| = |\measuredangle CBD|$ a $|\measuredangle CAN| = |\measuredangle ABD|$. Z rovnobežnosti DC a AN dostávame $|\measuredangle CAN| = |\measuredangle ACD|$ a preto aj $|\measuredangle ACD| =$ $= |\measuredangle ABN|$, z čoho dostávame, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový. Z toho vyplýva $|\measuredangle CAD| = |\measuredangle CBD| = |\measuredangle BAN|$ (obr. 2). Preto os uhla CAN je totožná s osou uhla BAD a P je stredom kružnice vpísanej do trojuholníka ABD, čiže DP je osou uhla ADB.

Keďže priamka CD je rovnobežná s AN, dostávame $|\measuredangle AND| = |\measuredangle BDC| =$ $= |\measuredangle BAC| = |\measuredangle BAN| + |\measuredangle NAC| = |\measuredangle CAD| + |\measuredangle NAC| = |\measuredangle NAD|$. Preto $|AD| =$ $= |ND|$, z čoho vyplýva, že os uhla ADB je osou strany AN, t. j. priamka DP je kolmá na priamku AN.

Poznámky. Prvú časť riešenia je jednoduché dostať dopočítaním uhlov bez použitia, že AC a BC sú dotyčnice k.

Je známe, že priesečník osi strany AN a osi uhla ABN leží na kružnici opísanej trojuholníku ABN. Preto bod P leží na kružnici k. Tento fakt je jednoduché dostať vyjadrením veľkosti uhla APB.

I-4. *Nech a a b sú kladné celé čísla. Dokážte, že existujú kladné celé čísla x a y také, že*

$$\binom{x+y}{2} = ax + by.$$

(*Maďarsko, Bálint Hujter*)

Riešenie. Označme $A = 2a + 1$ a $B = 2b + 1$. Dokazovaná rovnosť sa po úpravách zmení na

$$\frac{B-(x+y)}{x} = \frac{(x+y)-A}{y}.$$

Ak $A = B$, ľubovoľné x, y také, že $x + y = A$, spĺňajú rovnosť.

Zaoberajme sa ďalej prípadom $A < B$. Nech n je celé číslo z intervalu $\langle A, B)$ deliteľné číslom $d = B - A$. Potom $n \neq A$, pretože A je nepárne a d je párne. Zoberme

$$x = (B-n)\cdot\frac{n}{d}, \qquad y = (n-A)\cdot\frac{n}{d}.$$

Teda $n = x + y$ a rovnosť je splnená.

T-1. *Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1.$$

(*Slovensko, Patrik Bak*)

Riešenie. Dosadením $x = y = 0$ dostaneme $f(0) = 1$. Voľbou $x = 0$, $y = z$ získame

$$f(2z) = f(z) + z \tag{1}$$

a pre $x = z$, $y = -z \cdot f(z)$ dostaneme

$$f(z^2) = zf(z) - z + 1. \tag{2}$$

Dosadením $2t$ za z do (2) a použitím (1) máme

$$f(4t^2) = 2tf(2t) - 2t + 1 = 2t(f(t) + t) - 2t + 1 = 2tf(t) + 2t^2 - 2t + 1. \tag{3}$$

Dosadením $2t^2$ za z do (1) a použitím (1) a (2) dostaneme

$$f(4t^2) = f(2t^2) + 2t^2 = f(t^2) + t^2 + 2t^2 = tf(t) - t + 1 + 3t^2. \tag{4}$$

Z porovnania (3) a (4) vyplýva

$$\begin{aligned} 2tf(t) + 2t^2 - 2t + 1 &= tf(t) - t + 1 + 3t^2, \\ tf(t) - t^2 - t &= 0, \\ t(f(t) - t - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Za predpokladu $t \neq 0$ dostávame $f(t) = t + 1$. Pre $t = 0$ sme už skôr ukázali, že $f(0) = 1$. Preto pre všetky $t \in \mathbb{R}$ platí

$$f(t) = t + 1.$$

T-2. *Nech $x, y, z, w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sú také, že $x + y \neq 0$, $z + w \neq 0$ a $xy + zw \geqq 0$. Ukážte platnosť nerovnosti*

$$\left(\frac{x+y}{z+w} + \frac{z+w}{x+y}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \geqq \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{w} + \frac{w}{y}\right)^{-1}.$$

(*Švajčiarsko, Raphael Steiner*)

Riešenie. Najprv odpočítajme 1 od oboch strán a upravme nerovnosť na tvar

$$\frac{(x+y)(z+w)}{(x+y)^2 + (z+w)^2} - \frac{1}{2} \geqq \left(\frac{xz}{x^2+z^2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{yw}{y^2+w^2} - \frac{1}{2}\right),$$

ktorý je ekvivalentný s

$$\frac{(x-z)^2}{x^2+z^2} + \frac{(y-w)^2}{y^2+w^2} \geqq \frac{(x+y-z-w)^2}{(x+y)^2+(z+w)^2}.$$

Táto nerovnosť platí vďaka nerovnostiam

$$\frac{(x-z)^2}{x^2+z^2} + \frac{(y-w)^2}{y^2+w^2} \geqq \frac{((x-z)+(y-w))^2}{x^2+z^2+y^2+w^2} \geqq \frac{(x+y-z-w)^2}{(x+y)^2+(z+w)^2},$$

pričom prvá časť vyplýva z Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti a druhá časť z nerovnosti $xy + zw \geqq 0$ zo zadania.

T-3. *Na jednej strane ulice sa nachádza $n \geqq 2$ domov. Zo západu na východ sú označené číslami od 1 po n. Číslo každého domu je napísané na ceduľke. Jedného dňa sa obyvatelia ulice rozhodli vystreliť si z poštára a pomiešali ceduľky s číslami domov nasledujúcim spôsobom: každej dvojici susedných domov vymenili počas dňa ceduľky s ich aktuálnym číslom práve raz. Koľko rôznych usporiadaní ceduliek s číslami môže na konci dňa nastať?* (*Maďarsko, Bálint Hujter*)

Riešenie. Označme $f(n)$ hľadaný počet usporiadaní pre n domov. Matematickou indukciou dokážeme, že $f(n) = 2^{n-2}$. Pre $n = 2$ to tak je; $f(2) = 2^{2-2} = 1$. Definujme $f(1) = 1$. Ďalej budeme predpokladať, že $n > 2$.

Označme H_i dom s číslom i na začiatku dňa a označme $(i \rightleftarrows i+1)$ výmenu medzi domami H_i a H_{i+1}. Nech H_k je dom, ktorý má na konci dňa ceduľku n. To znamená, že výmeny $(n-1 \rightleftarrows n), (n-2 \rightleftarrows n-1), \ldots, (k \rightleftarrows k+1)$ nasledovali v tomto poradí, až sa ceduľka n ocitla na dome H_k. Navyše výmena $(k-1 \rightleftarrows k)$ musela byť skôr ako výmena $(k \rightleftarrows k+1)$, inak by ceduľka n skončila na niektorom z domov H_1 až H_{k-1}.

To znamená, že pre každé i spĺňajúce $k \leqq i < n$ bude ceduľka i na dome H_{i+1}, zatiaľ čo ceduľky $1, \ldots, k$ budú na domoch $\{H_1, H_2, \ldots, H_{k-1}\}$ a H_{k+1} v nejakom rozložení. Rovnako by sme postupovali, keby sme mali len domy $H_1, H_2, \ldots, H_k$; s jediným rozdielom, že na konci dom H_k bude mať ceduľku n. Spolu tak máme $f(k)$ rôznych konečných usporiadaní ceduliek, ak n je na dome H_k (pre $k = 1, \ldots, n-1$).

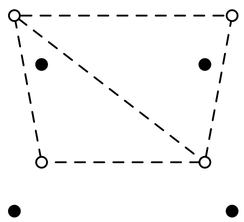
Dostávame

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = 1 + \sum_{i=0}^{n-3} 2^i = 2^{n-2}.$$

T-4. *Uvažujme konečne veľa bodov v rovine takých, že žiadne tri neležia na jednej priamke. Každý z týchto bodov ofarbíme červenou alebo zelenou farbou tak, že vo vnútri trojuholníka s vrcholmi jednej farby sa nachádza aspoň jeden bod ofarbený druhou farbou. Aký je maximálny počet bodov s touto vlastnosťou?* (*Maďarsko, Bálint Hujter*)

Riešenie. Odpoveď je 8.

Nazvime množinu pozostávajúcu z červených a zelených bodov dobrou, ak žiadne tri body neležia na jednej priamke a ľubovoľný z trojuholníkov vytvorený z bodov rovnakej farby obsahuje bod druhej farby. Na obr. 3 vidíme takúto množinu s 8 bodmi (červené body sú znázornené prázdnym krúžkom, zelené plným; sú tu zobrazené dva typy jednofarebných trojuholníkov, vďaka symetrii podmienku spĺňa aj zvyšných šesť trojuholníkov).

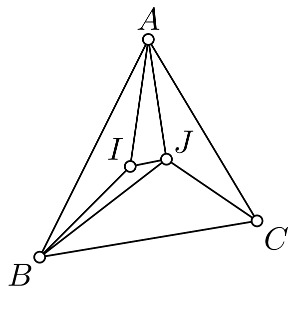


Obr. 3

Chceme dokázať, že dobrá množina môže mať najviac 4 body z každej farby. Dokážeme to dvoma spôsobmi.

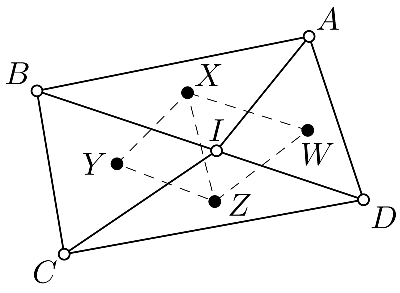
V prvom prípade postupujeme sporom. Nech množina S je kontrapríkladom s minimálnou mohutnosťou. Predpokladajme, že S obsahuje aspoň päť červených bodov. Nech P je nejaký vrchol z konvexného obalu množiny S. Potom P neleží vo vnútri žiadneho jednofarebného trojuholníka a množina $S \setminus \{P\}$ je dobrá. Ale množina S bola najmenším kontrapríkladom, teda $S \setminus \{P\}$ má najviac štyri body z každej farby. Preto S má práve päť červených bodov, všetky vrcholy konvexného obalu množiny S sú červené a S má najviac štyri zelené body. Konvexný obal množiny S je trojuholník, štvoruholník alebo päťuholník. Rozoberieme jednotlivé prípady.

Ak je konvexný obal trojuholník, označme A, B a C jeho vrcholy a I, J červené body vo vnútri trojuholníka. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že priamka IJ pretína strany AB a AC (a nepretína BC). Navyše nech I je k AB bližšie ako J (obr. 4). Trojuholníky ABI, AIJ, AJC, BIJ a BJC sú trojuholníky vytvorené z červených vrcholov, ktoré nemajú spoločné vnútro. Preto aspoň jeden z týchto trojuholníkov je prázdny, keďže máme najviac štyri zelené body.



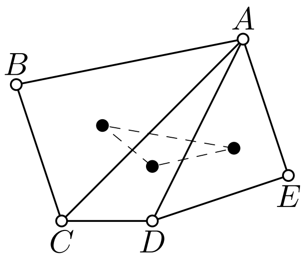
Obr. 4

Ak je konvexný obal štvoruholník, označme A, B, C, D jeho vrcholy a I nech je zvyšný červený bod vo vnútri. Trojuholníky ABI, BCI, CDI a DAI sú vytvorené z červených vrcholov, nemajú spoločné vnútro a každý z nich má zelený bod vo svojom vnútri. Označme tieto zelené body postupne X, Y, Z, W (obr. 5). Potom trojuholníky XYZ a ZWX majú zelené vrcholy, ale obidva nemôžu mať bod I (jediný možný červený bod) vo svojom vnútri.



Obr. 5

Ak je konvexný obal päťuholník, označme A, B, C, D, E jeho vrcholy. Trojuholníky ABC, ACD a ADE sú tri trojuholníky vytvorené z červených vrcholov, ktoré nemajú spoločné vnútro a každý z nich musí mať zelený bod vo svojom vnútri. Tieto zelené body tvoria trojuholník, ktorý nemá žiaden červený bod vo svojom vnútri (obr. 6).



Obr. 6

Vo všetkých troch prípadoch sme odvodili, že S nie je dobrá množina, čo je spor s naším predpokladom.

Iné riešenie. Najskôr dokážeme pomocné tvrdenie: *Majme dobrú množinu bodov. Ak konvexný obal nejakých červených bodov obsahuje práve x červených bodov a práve y z nich je v jeho vnútri, tak v jeho vnútri je aspoň $x+y-2$ zelených bodov.* (Analogické tvrdenie platí samozrejme aj s vymenenými farbami.)

Dôkaz. Ak konvexný obal nie je mnohouholník (t. j. $x \leqq 2$), tvrdenie je triviálne. Inak uvažujme rozdelenie konvexného obalu na trojuholníky, ktorých vrcholy sú červené body a nemajú vo svojom vnútri červený bod. Označme N počet týchto trojuholníkov. Potom súčet ich vnútorných uhlov je $N\pi$. Na druhej strane, pre každý vnútorný bod je súčet uhlov okolo neho vždy 2π a body z hranice konvexného obalu tvoria konvexný $(x-y)$-uholník so súčtom vnútorných uhlov $(x-y-2)\pi$. Porovnaním máme

$$N\pi = 2y\pi + (x-y-2)\pi,$$

odkiaľ po úprave dostávame $N = x+y-2$. Každý z N trojuholníkov musí obsahovať jeden zelený bod vo svojom vnútri, z čoho vyplýva dokazované tvrdenie.

Aplikujme tvrdenie na všetkých n červených bodov, pričom m červených bodov je vo vnútri ich konvexného obalu. Dostávame, že vo vnútri konvexného obalu zloženého z červených bodov je aspoň $n+m-2$ zelených bodov. Teraz aplikujme tvrdenie na tieto zelené body a dostávame, že je aspoň $(n+m-2)-2$ červených bodov v ich konvexnom obale. Avšak tieto červené body sú tiež vnútornými bodmi konvexného obalu všetkých červených bodov a teda

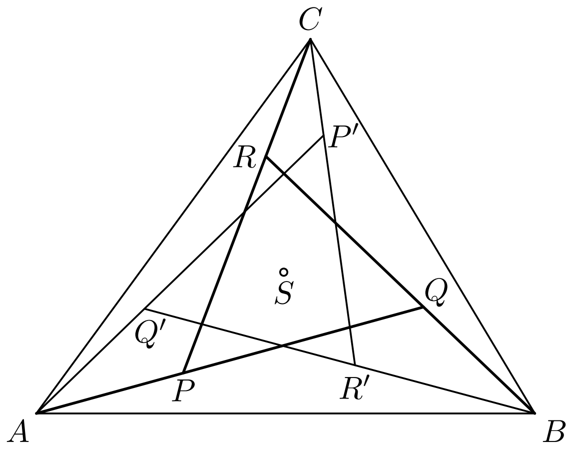
$$(n+m-2)-2 \leqq m.$$

Odtiaľ dostávame $n \leqq 4$ a naše tvrdenie je dokázané.

Poznámka. Uvedené pomocné tvrdenie možno dokázať aj matematickou indukciou vzhľadom na x.

T-5. *Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Skonštruujte trojuholník PQR, pre ktorý platí $|AB| = 2|PQ|$, $|BC| = 2|QR|$, $|CA| = 2|RP|$ a priamky PQ, QR a RP prechádzajú postupne bodmi A, B a C.* (Rakúsko, Gerd Baron)

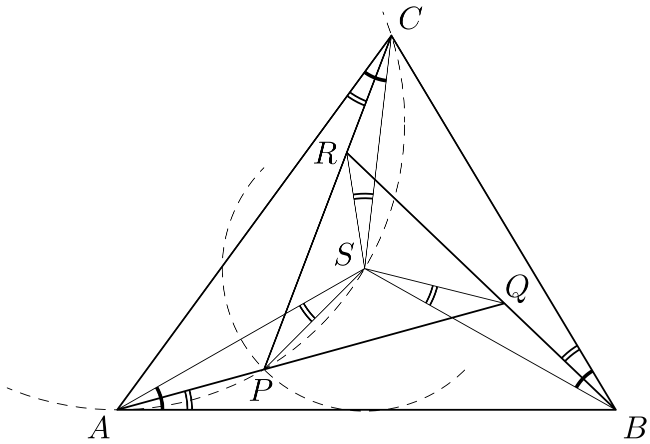
Riešenie. Existujú dva trojuholníky PQR spĺňajúce podmienky zadania (obr. 7). Uvedieme konštrukciu jedného z nich (takého, že bod P leží medzi A a Q).



Obr. 7

Keďže uhly trojuholníkov PQR a ABC sú rovnaké, je $|\measuredangle QAB| = |\measuredangle RBC| = |\measuredangle PCA|$. Označme S Brocardov bod v trojuholníku ABC, t. j. taký bod, že $|\measuredangle SAB| = |\measuredangle SBC| = |\measuredangle SCA|$. Vzhľadom na vlastnosti obvodových a úsekových uhlov sa kružnica opísaná trojuholníku APC dotýka priamky AB. Podobne kružnica opísaná trojuholníku ASC sa dotýka AB. Keďže existuje jediná kružnica prechádzajúca cez C a dotýkajúca sa priamky AB v bode A, dostávame, že $APSC$ je tetivový štvoruholník. Podobne sú tetivové aj štvoruholníky $BQSA$ a $CRSB$.

Ukážeme, že trojuholník APS je podobný trojuholníku BQS. Vieme, že $|\measuredangle SAP| = |\measuredangle SBQ|$, pretože $|\measuredangle SAB| = |\measuredangle SBC|$ a $|\measuredangle PAB| = |\measuredangle QBC|$. Taktiež $|\measuredangle ASP| = |\measuredangle QSB|$, pretože $|\measuredangle ASP| = |\measuredangle ACP| = |\measuredangle QAB| = |\measuredangle QSB|$. Trojuholníky APS a BQS teda majú rovnaké uhly a to isté platí aj pre trojuholník CRS. Otočme trojuholník PQR okolo bodu S o uhol PSA a zobrazme ho v rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom $|SA|/|SP|$. Vzhľadom na podobnosť trojuholníkov APS, BQS a CRS bude výsledkom zobrazenia trojuholník ABC (obr. 8).



Obr. 8

Konštrukcia trojuholníka PQR bude preto nasledovná: Najskôr zostrojíme kružnicu prechádzajúcu cez body A, C a dotýkajúcu sa priamky AB; analogicky zostrojíme ďalšie dve kružnice. Priesečníkom týchto troch kružníc je Brocardov bod, označíme ho S. Následne zostrojíme kružnicu so stredom S a polomerom $|SA|/2$. Jej priesečník s oblúkom AS kružnice opísanej trojuholníku ASC neobsahujúcim bod C označíme P. Analogicky zostrojíme body Q a R.

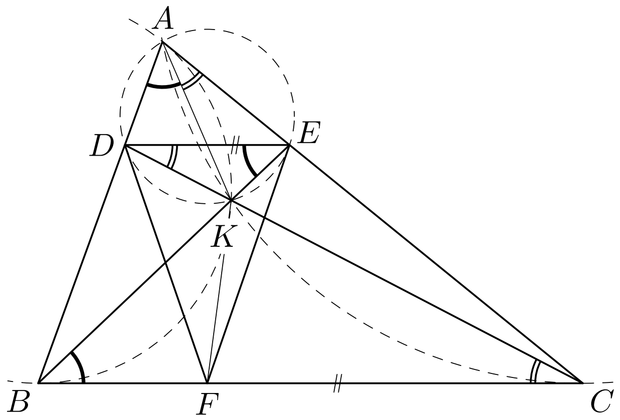
Vieme, že Brocardov bod S vždy existuje a je vo vnútri trojuholníka. Ľahko možno overiť, že oblúky AS, BS a CS využité v konštrukcii sú vo vnútri trojuholníka (napr. oblúk AS sa dotýka strany AB a tiež je vo vnútri tupouhlého trojuholníka ASB). To znamená, že bod P je jednoznačne určený a je vo vnútri trojuholníka ABC. Podobne Q je jednoznačne určený a s využitím definície úsekového uhla dostávame $|\measuredangle PAB| = |\measuredangle QBC|$. Bod R je tiež jednoznačne určený a $|\measuredangle QBC| = |\measuredangle RCA|$. Uhol PCA je taký istý, nakoľko opäť využitím úsekového uhla dostávame $|\measuredangle PCA| = |\measuredangle PAB|$. To znamená, že body R, P a C sú kolineárne.

T-6. *Nech K je bod vnútri ostrouhlého trojuholníka ABC taký, že BC je spoločnou dotyčnicou kružníc opísaných trojuholníkom AKB a AKC. Nech D je priesečník priamok CK a AB a bod E je priesečník priamok BK a AC. Označme F priesečník priamky BC a osi úsečky DE. Kružnica opísaná trojuholníku ABC a kružnica k so stredom F a polomerom FD sa pretínajú v bodoch P a Q. Dokážte, že úsečka PQ je priemerom kružnice k.* (*Slovensko, Patrik Bak*)

Riešenie. Priamka BC je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKC, takže $|\measuredangle BCD| = |\measuredangle CAK|$. Analogicky $|\measuredangle CBE| = |\measuredangle BAK|$. Preto

$$180^\circ = |\measuredangle KBC| + |\measuredangle KCB| + |\measuredangle BKC| = \measuredangle DAK| + |\measuredangle EAK| + |\measuredangle DKE|$$

a teda $ADKE$ je tetivový štvoruholník. Potom $|\measuredangle KBC| = |\measuredangle DAK| = |\measuredangle DEK|$, čiže $DE \parallel BC$ (obr. 9).



Obr. 9

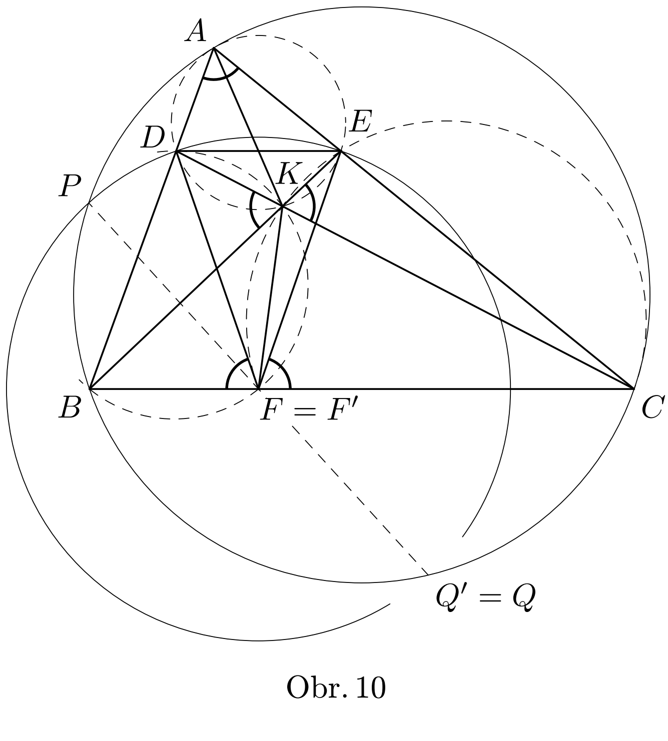
Všimnime si, že F je jediný bod na BC, pre ktorý sú uhly DFB a CFE rovnaké. Označme F' taký bod na BC, pre ktorý je štvoruholník $BF'KD$ tetivový. Potom

$$\begin{aligned}|\measuredangle F'KE| &= 360^\circ - |\measuredangle EKD| - |\measuredangle DKF'| = \\ &= 360^\circ - (180^\circ - |\measuredangle BAC|) - (180^\circ - |\measuredangle CBA|) = 180^\circ - |\measuredangle ACB|,\end{aligned}$$

a teda štvoruholník $F'CEK$ je tiež tetivový a

$$|\measuredangle DF'B| = |\measuredangle DKB| = |\measuredangle CKE| = |\measuredangle CF'E|.$$

Z toho vyplýva, že $F = F'$ a $|\measuredangle DFB| = |\measuredangle CFE| = 180^\circ - |\measuredangle BKC| = |\measuredangle BAC|$, takže



Obr. 10

trojuholníky FBD a FEC sú oba podobné s trojuholníkom ABC, čiže

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|FE|}{|FC|} = \frac{|FB|}{|FD|}.$$

Odtiaľ $|FB| \cdot |FC| = |FD|^2$. Označme Q' priesečník priamky PF a kružnice opísanej trojuholníku ABC (obr. 10). Použitím mocnosti bodu F dostávame

$$|FD|^2 = |FB| \cdot |FC| = |FP| \cdot |FQ'| = |FD| \cdot |FQ'|.$$

Preto $|FQ'| = |FD|$ a $Q = Q'$, z čoho už vyplýva dokazované tvrdenie.

Poznámka. Bod F sa nazýva Miquelov bod štvoruholníka $ADKE$.

T-7. *Do tabuľky pozostávajúcej z* 2013×2013 *políčok sú po riadkoch napísané čísla od* 1 *do* 2013^2. *Všetky stĺpce a všetky riadky obsahujúce aspoň jednu z druhých mocnín* 1, 4, 9, ..., 2013^2 *naraz odstránime. Koľko políčok tabuľky ostane?*

(*Rakúsko, Gerd Baron*)

Riešenie. Nech $m = 503$ a $n = 4m + 1 = 2013$. Všimnime si, že

$$(m-1)n = (m-1)(4m+1) < m \cdot 4m = (2m)^2 < m(4m+1) = mn,$$

takže mocnina $(2m)^2$ je v m-tom riadku.

Poznamenajme, že ak $k \leqq 2m$, tak hodnota výrazu $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ je nanajvýš n, a ak $k \geqq 2m$, je táto hodnota aspoň n. Takže prvých $2m + 1$ mocnín je rozmiestnených tak, že nevynechajú žiaden zo za sebou idúcich riadkov a teda prvých $m + 1$ riadkov bude odstránených. Na druhej strane posledných $n - (2m - 1) = 2m + 2$ mocnín je po dvojiciach v rôznych riadkoch. Z toho vyplýva, že prvých $m + 1$ riadkov a ďalších $2m$ riadkov bude odstránených a m riadkov zostane.

Stĺpec j bude odstránený práve vtedy, keď j je zvyškom nejakej druhej mocniny po delení číslom $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Podľa čínskej vety o zvyškoch to nastane vtedy, keď j je zvyškom nejakej druhej mocniny po delení 3, 11 a 61. Keďže počet vyhovujúcich zvyškov pre tieto tri čísla je postupne 2, 6 a 31, hľadaný počet vyhovujúcich zvyškov po delení 2013 (opäť podľa čínskej zvyškovej vety) je $2 \cdot 6 \cdot 31 = 372$. Počet stĺpcov, ktoré ostanú, je $2013 - 372 = 1641$. Spolu teda ostane $503 \cdot 1641 = 825\,423$ políčok.

T-8. *Na tabuli je napísaný výraz*

$$\pm \square \pm \square \pm \square \pm \square \pm \square \pm \square.$$

Hráči A a B sa striedajú pri nahrádzaní symbolov $\square$ *kladnými celými číslami. Hráč A začína. Keď sú všetky symboly* $\square$ *nahradené, hráč A nahradí každý znak* $\pm$ *znamienkom* $+$ *alebo* $-$, *nezávisle na ostatných nahradeniach znakov* $\pm$. *Hráč A vyhrá, ak hodnota výrazu na tabuli nie je deliteľná žiadnym z čísel* 11, 12, ..., 18. *Inak vyhrá hráč B. Určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu.* (*Česká republika, Michal Rolínek*)

Riešenie. Číslo budeme nazývať *dobré*, ak má deliteľa z množiny $\{11, 12, \ldots, 18\}$.

Ukážeme, že hráč B má víťaznú stratégiu. Vo svojom prvom i druhom ťahu nahradí hráč B symbol $\square$ číslom 18!. Vo svojom poslednom ťahu ho nahradí číslom x (určíme ho neskôr), ktoré zabezpečí, že každá možná hodnota výrazu, ktorý získame po určení znamienok, bude v prospech hráča B.

Pri výbere čísla x môžeme pracovať v množine zvyškov po delení číslom 18!. V takomto prípade prvé dva ťahy hráča B sa vo výraze budú počítať ako 0 a znamienko pred nimi výsledok neovplyvní. Pred posledným ťahom hráča B máme osem možných kombinácií pre znamienka pred číslami napísanými hráčom A, čo dáva osem rôznych výsledkov $a_1, a_2, \ldots, a_8$. Ak voľbou čísla x zabezpečíme, že každé z čísel a_1+x, a_2+x, $\ldots$, a_8+x bude dobré, potom taktiež čísla a_1-x, a_2-x, $\ldots$, a_8-x budú dobré, pretože pre každé $i \in \{1,\ldots,8\}$ existuje $j \in \{1,\ldots,8\}$ také, že $a_i - x = -(a_j + x)$.

Čísla $a_1, \ldots, a_8$ majú rovnakú paritu a teda sa medzi nimi nachádzajú najviac dva rôzne zvyšky po delení číslom 4. Aspoň tri z ôsmich čísel dávajú rovnaký zvyšok po delení tromi, bez ujmy na všeobecnosti nech $a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \pmod 3$. Môžeme tiež predpokladať, že $a_4 \equiv a_3 \pmod 4$.

Hľadané x môžeme na základe čínskej zvyškovej vety vybrať tak, že $9 \mid a_1 + x$, $5 \mid a_2 + x$, $16 \mid a_4 + x$, $7 \mid a_5 + x$, $11 \mid a_6 + x$, $13 \mid a_7 + x$ a $17 \mid a_8 + x$. Na základe tohto výberu x sme zabezpečili, že $18 \mid a_1 + x$, $15 \mid a_2 + x$, $12 \mid a_3 + x$, $16 \mid a_4 + x$, $14 \mid a_5 + x$, $11 \mid a_6 + x$, $13 \mid a_7 + x$ a $17 \mid a_8 + x$.