63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

1. *Dokážte, že kladné reálne čísla a, b, c spĺňajú rovnicu*

$$a^4+b^4+c^4+4a^2b^2c^2=2\big(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\big)$$

práve vtedy, keď existuje trojuholník ABC s vnútornými uhlami α, β, γ takými, že

$$\sin\alpha=a,\quad \sin\beta=b\quad \text{a}\quad \sin\gamma=c.$$

(Jaromír Šimša)

Riešenie. V prvej časti riešenia uvažujme ľubovoľný trojuholník ABC s vnútornými uhlami α, β, γ. Vďaka sínusovej vete ho prípadnou podobnosťou môžeme zmeniť tak, aby dĺžky jeho strán boli priamo kladné čísla a, b, c rovné sínusom jeho vnútorných uhlov, teda

$$a=\sin\alpha,\quad b=\sin\beta\quad \text{a}\quad c=\sin\gamma.$$

Podľa kosínusovej vety pre tieto čísla platí rovnosť, ktorú budeme hneď upravovať, až dostaneme rovnosť zo zadania úlohy:

$$\begin{aligned}
a^2&=b^2+c^2-2bc\cdot\big(\pm\sqrt{1-a^2}\big),\\
2bc\cdot\big(\pm\sqrt{1-a^2}\big)&=b^2+c^2-a^2,\quad /^2\\
4b^2c^2(1-a^2)&=\big(b^2+c^2-a^2\big)^2,\\
4b^2c^2-4a^2b^2c^2&=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2,\\
a^4+b^4+c^4+4a^2b^2c^2&=2\big(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\big).
\end{aligned}$$

V druhej časti riešenia predpokladajme, že a, b, c sú pevné kladné čísla spĺňajúce zadanú rovnicu. Opačným postupom ako v prvej časti riešenia ju upravíme na tvar

$$4b^2c^2\big(1-a^2\big)=\big(b^2+c^2-a^2\big)^2.$$

Z toho vyplýva, že číslo a (kladné podľa zadaného predpokladu) je nanajvýš rovné 1. Existuje preto $\alpha\in(0,\pi)$ také, že $\sin\alpha=a$ a že upravenú rovnicu možno po odmocnení zapísať v tvare

$$2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2.$$

Ak teda zostrojíme podľa vety *sus* trojuholník ABC, v ktorom $|AC|=b$, $|AB|=c$ a $|\measuredangle BAC|=\alpha$, bude v ňom vďaka kosínusovej vete podľa predchádzajúcej rovnosti platiť $|BC|=a$, takže potom z ďalších dvoch podobných dôsledkov zadanej rovnice

$$4a^2c^2\big(1-b^2\big)=\big(a^2+c^2-b^2\big)^2\quad \text{a}\quad 4a^2b^2\big(1-c^2\big)=\big(a^2+b^2-c^2\big)^2$$

vyplýva, že pre vnútorné uhly α, β, γ takého trojuholníka ABC bude platiť nielen $\sin\alpha=a$ (pozri vyššie), ale aj $\cos^2\beta=1-b^2$ a $\cos^2\gamma=1-c^2$, čiže $\sin\beta=b$ a $\sin\gamma=c$.

Iné riešenie. (Podľa *Patrika Baka.*) Uvedenú rovnosť možno ekvivalentne upraviť na tvar

$$4a^2b^2c^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a). \tag{1}$$

Nech pre kladné čísla a, b, c platí táto rovnosť. Vzhľadom na symetriu môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a \geqq b \geqq c$. Prvé tri činitele na pravej strane v (1) sú podľa našich predpokladov kladné a keďže ľavá strana je tiež kladná, musí byť kladný aj štvrtý činiteľ. Čísla a, b, c teda spĺňajú trojuholníkové nerovnosti a existuje trojuholník ABC so stranami a, b, c. Pre jeho obsah S podľa Herónovho vzorca platí

$$16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a), \tag{2}$$

odkiaľ spojením s (1) máme $4a^2b^2c^2 = 16S^2$, čiže $abc = 2S$. Ak označíme r polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC, podľa známeho vzťahu platí $r = abc/(4S)$, a preto $r = \frac{1}{2}$. Zároveň však $r = a/(2\sin\alpha)$, a teda $a = \sin\alpha$. Analogicky dostaneme $b = \sin\beta$ a $c = \sin\gamma$.

Pre dôkaz opačnej implikácie predpokladajme, že trojuholník ABC má strany a uhly spĺňajúce $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$ a $c = \sin\gamma$. Potom použitím označenia a známych vzťahov z predošlého odseku dostaneme $r = \frac{1}{2}$ a $abc = 2S$, odkiaľ po umocnení a použití vzorca (2) dostaneme želanú rovnosť (1).

---

2. *Pre dané kladné celé čísla a, b, x_1 zostavíme postupnosť čísel $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňajúcich vzťah $x_n = ax_{n-1} + b$ pre každé $n \geqq 2$. Určte podmienku na zadané čísla a, b a x_1, ktorá je nutná a postačujúca na to, aby pre všetky indexy m, n platila implikácia $m \mid n \Rightarrow$ $\Rightarrow x_m \mid x_n$.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Ukážeme, že hľadanou podmienkou je rovnosť $x_1 = b$. V priebehu riešenia využijeme jednoduchý poznatok, že všeobecný člen x_n skúmaných postupností má vyjadrenie

$$x_n = a^{n-1}x_1 + \bigl(a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a + 1\bigr)b. \tag{1}$$

V prvej časti riešenia odvodíme rovnosť $x_1 = b$ z predpokladu, že pre každé $n \geqq 1$ platí $x_n \mid x_{2n}$ (využijeme teda len časť zo všetkých implikácií zo zadania úlohy). Keďže vzorec (1) pre skrátenú postupnosť $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ vedie na vyjadrenie

$$x_{2n} = a^n x_n + \bigl(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1\bigr)b,$$

pre podiel x_{2n}/x_n z posledného vzťahu vyplýva

$$\frac{x_{2n}}{x_n} = a^n + \frac{\bigl(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1\bigr)b}{x_n}. \tag{2}$$

Špeciálne pre $n = 1$ tak dostávame nutnú podmienku $x_1 \mid b$. Potrebnú podmienku $x_1 =$ $= b$ odvodíme, keď pripustíme, že platí $x_1 < b$, a z toho dôjdeme k sporu. Uvažujme čísla

$$y_n = \bigl(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1\bigr)b$$

z čitateľa zlomku na pravej strane (2), ktoré ako čísla x_n spĺňajú rekurentný vzťah $y_{n+1} = ay_n + b$. Podľa vzorca (1) potom v prípade $x_1 < b$ platí pre každé n nerovnosť

$x_n < y_n$, pričom podľa (2) sú všetky podiely y_n/x_n celočíselné a tvoria klesajúcu postupnosť, pretože

$$\frac{y_n}{x_n} - \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{y_n}{x_n} - \frac{ay_n + b}{ax_n + b} = \frac{b(y_n - x_n)}{x_n(ax_n + b)} > 0. \tag{3}$$

Dostali sme nekonečnú klesajúcu postupnosť celých čísel väčších ako 1, a to je avizovaný spor. Rovnosť $x_1 = b$ je tak dokázaná.

V druhej jednoduchšej časti riešenia ukážeme, že v prípade $x_1 = b$ platia všetky implikácie zo zadania úlohy. Využijeme pritom opäť vzorec (1), podľa ktorého v prípade $a = 1$ po dosadení $x_1 = b$ dostaneme pre každé n vyjadrenie $x_n = nb$, zatiaľ čo v prípade $a > 1$ vychádza vzorec

$$x_n = \frac{(a^n - 1)b}{a - 1}.$$

Všetky dokazované implikácie tak sú v prípade $a = 1$ úplne triviálne, zatiaľ čo v prípade $a > 1$ sú zrejmým dôsledkom známeho pravidla

$$m \mid n \quad\Longrightarrow\quad a^m - 1 \mid a^n - 1,$$

ktoré pre $n = km$ vyplýva z algebraického vzorca

$$a^{km} - 1 = \bigl(a^m - 1\bigr)\bigl(a^{(k-1)m} + a^{(k-2)m} + \ldots + a + 1\bigr).$$

Poznámka. Tvrdenie, že všetky zlomky z pravých strán (2), teda zlomky

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\bigl(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1\bigr)b}{a^{n-1}x_1 + \bigl(a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a + 1\bigr)b},$$

sú celočíselné jedine v prípade $x_1 = b$, možno odvodiť aj z poznatku, že také zlomky majú pre $n \to \infty$ limitu

$$\frac{ab}{(a-1)x_1 + b}$$

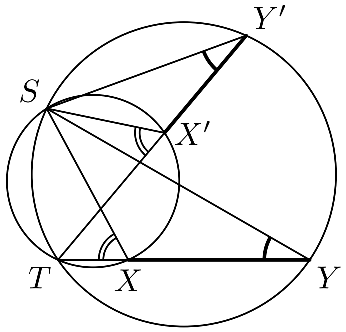
(rutinný výpočet tu neuvádzame), a preto kvôli ich celočíselnosti musí pre všetky dostatočne veľké n platiť rovnosť $y_{n+1}/x_{n+1} = y_n/x_n$, ktorá podľa úpravy (3) platí, len keď je $y_n = x_n$, a teda $x_1 = b$.

---

3. *Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$, pričom $|\angle ABC| = |\angle ADC| = 135°$. Na polpriamkach AB, AD sú postupne zvolené také body M, N, že $|\angle MCD| = |\angle NCB| = 90°$. Kružnice opísané trojuholníkom AMN a ABD sa druhýkrát pretínajú v bode $K \neq A$. Dokážte, že priamky AK a KC sú navzájom kolmé.* (Irán)

Riešenie. (Podľa *Patrika Baka.*) Pripomeňme si najskôr jedno známe tvrdenie o *špirálovej podobnosti* (t. j. o zobrazení, ktoré je zložením rovnoľahlosti a otočenia s rovnakým stredom).

Tvrdenie. Majme úsečky XY a $X'Y'$, ktoré nie sú rovnobežné. Prienik priamok XY a $X'Y'$ označme T. Potom stredom špirálovej podobnosti, ktorá úsečku XY zobrazí na úsečku $X'Y'$, je priesečník kružníc opísaných trojuholníkom XTX' a YTY' rôzny od bodu T.[1]



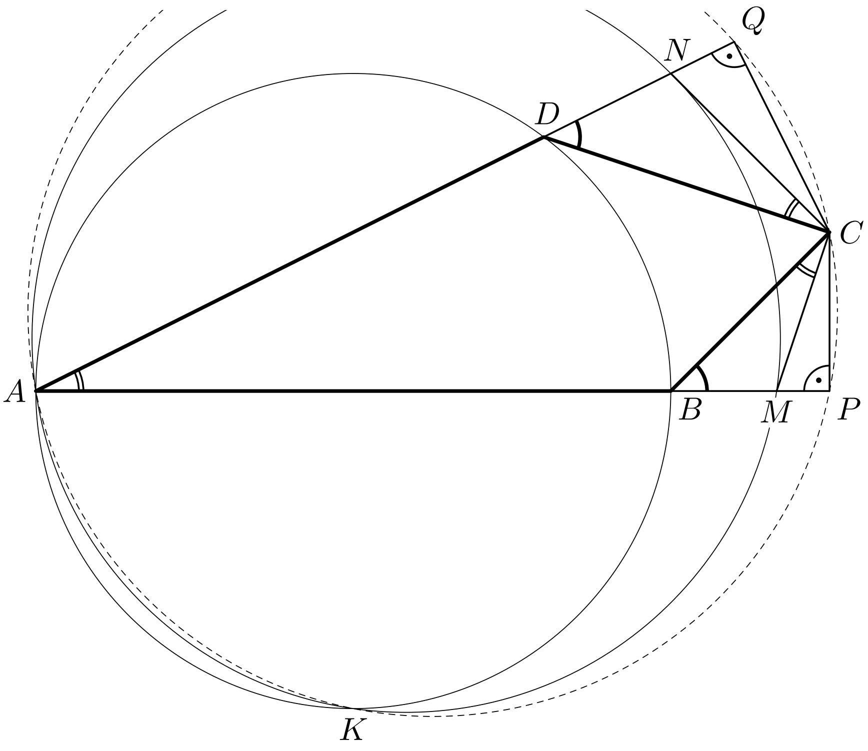
Obr. 1

Dôkaz. Uvedieme dôkaz len pre konfiguráciu ako na obr. 1. Priesečník kružníc, o ktorom dokazujeme, že je stredom špirálovej podobnosti, označme S. Stačí ukázať podobnosť trojuholníkov XSY a $X'SY'$. Tá vyplýva jednoducho z obvodových uhlov:

$$|\measuredangle XYS| = |\measuredangle TYS| = |\measuredangle TY'S| = |\measuredangle X'Y'S|,$$
$$|\measuredangle SXY| = 180^\circ - |\measuredangle SXT| = 180^\circ - |\measuredangle SX'T| = |\measuredangle SX'Y'|.$$

Prejdime k riešeniu samotnej úlohy. Keďže súčet vnútorných uhlov v štvoruholníku je 360°, zo zadania vyplýva $|\measuredangle BAD| + |\measuredangle BCD| = 90^\circ$ a $|\measuredangle MBC| = |\measuredangle NDC| = 45^\circ$. Potom $|\measuredangle BCM| = 90^\circ - |\measuredangle BCD| = |\measuredangle BAD|$ a podobne dostaneme $|\measuredangle DCN| = |\measuredangle BAD|$. Takže trojuholníky BMC a DNC sú podobné (obr. 2). Päty kolmíc z bodu C na priamky AB a AD označme postupne P a Q. Aj trojuholníky BPC a DQC sú podobné, preto $|BM| : |BP| = |DN| : |DQ|$.

[1] Tvrdenie neuvádzame v presnej forme: V špeciálnych prípadoch sa môže stať, že bod T splýva s niektorým z krajných bodov daných úsečiek, prípadne uvedené kružnice nemajú iný spoločný bod ako T.



Obr. 2

Uvažujme špirálovú podobnosť $\mathcal{S}$, ktorá zobrazí úsečku BM na DN. Podľa tvrdenia z úvodu je jej stredom práve bod K. Avšak vzhľadom na odvodený pomer zobrazuje $\mathcal{S}$ úsečku BP na DQ. Preto (opäť podľa tvrdenia z úvodu) bod K leží na kružnici opísanej trojuholníku APQ, čo je Tálesova kružnica nad priemerom AC, takže uhol AKC je pravý.

---

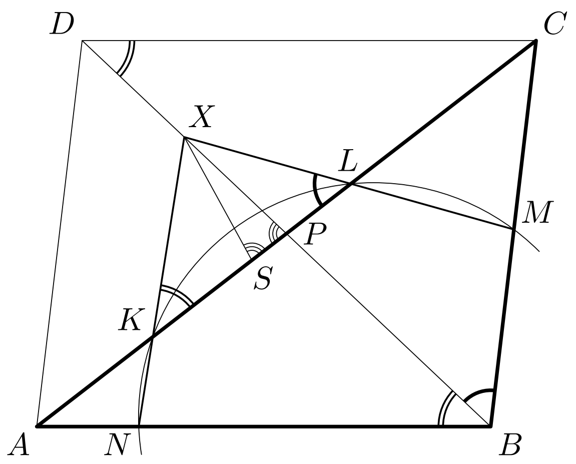
4. *Daný je trojuholník ABC, pričom P je stred strany AC. Kružnica k pretína úsečky AP, CP, BC, AB postupne v ich vnútorných bodoch K, L, M, N. Označme S stred KL. Nech platí*

$$2 \cdot |AN| \cdot |AB| \cdot |CL| = 2 \cdot |CM| \cdot |BC| \cdot |AK| = |AC| \cdot |AK| \cdot |CL|.$$

Dokážte, že ak $P \neq S$, tak priesečník priamok KN a ML leží na osi úsečky PS.

(Ján Mazák)

Riešenie. Označme D obraz bodu B v stredovej súmernosti so stredom v P (potom $ABCD$ je rovnobežník). Z rovnosti $2|AN| \cdot |AB| \cdot |CL| = |AC| \cdot |AK| \cdot |CL|$ máme $|AN| \cdot |AB| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |AK|$, takže štvoruholník $KPBN$ je tetivový. Podobne aj štvoruholník $LPBM$ je tetivový. Keďže štvoruholník $KLMN$ je tiež tetivový, sú priamky KN, BP a LM chordálami dvojíc kružníc opísaných uvedeným tetivovým štvoruholníkom. Preto priesečník X priamok KN a ML leží na priamke BD (obr. 3).



Obr. 3

Z tetivovosti uvedených štvoruholníkov vyplýva zhodnosť uhlov CBD a KLX; podobne uhly CDB, ABD a LKX sú zhodné. Podľa vety *uu* je trojuholník KLX podobný s trojuholníkom DBC. Uhly XSP a XPS musia byť rovnaké, lebo sú to uhly, ktoré zvierajú zodpovedajúce si ťažnice so stranami v podobných trojuholníkoch (to platí ako pre konfiguráciu, keď bod S leží na úsečke AP, tak pre konfiguráciu, keď leží na úsečke CP, argumentácia je takmer rovnaká). Preto bod X leží na osi úsečky PS.

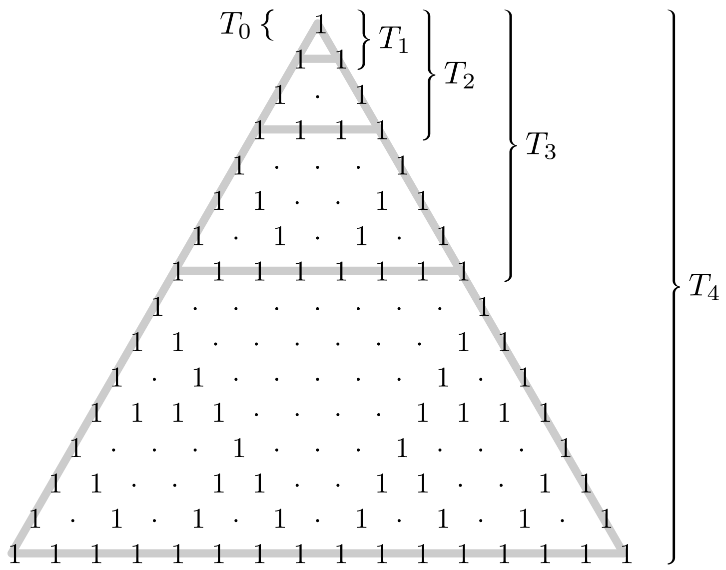
---

5. *Určte všetky kladné celé čísla n spĺňajúce nasledujúcu podmienku: pre každé nezáporné celé čísla k, m také, že $k + m \leqq n$, dávajú čísla $\binom{n-k}{m}$ a $\binom{n-m}{k}$ rovnaký zvyšok po delení dvoma.* (*Poľsko*)

Riešenie. (Podľa *Miroslava Psotu.*) V riešení budeme pracovať s Pascalovým trojuholníkom, teda so zápisom kombinačných čísel do nasledovnej (nekonečnej) schémy:

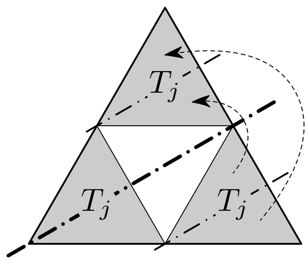
$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \ \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \ \binom{2}{1} \ \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \ \binom{3}{1} \ \binom{3}{2} \ \binom{3}{3} \\
\dots
\end{array}
$$

Vieme, že každé číslo v tejto schéme (okrem čísel 1 na začiatku a na konci každého riadka) je rovné súčtu dvoch čísel bezprostredne nad ním. Ak v Pascalovom trojuholníku každé číslo nahradíme jeho zvyškom po delení dvoma, t. j. nulou alebo jednotkou podľa parity čísla, uvedené pravidlo spôsobí, že ak vedľa seba budú dva rovnaké zvyšky, pod nimi bude 0 a ak vedľa seba budú dva rôzne zvyšky, pod nimi bude 1. Prvých niekoľko riadkov vyzerá takto (kvôli prehľadnosti nuly znázorňujeme bodkami):



Nech T_j označuje trojuholník vytvorený z prvých 2^j riadkov takéhoto „zvyškového" Pascalovho trojuholníka (t. j. riadkov pochádzajúcich z kombinačných čísel $\binom{i}{l}$ pre $i = 0, 1, \dots, 2^j - 1$). Ľahko možno nahliadnuť a matematickou indukciou dokázať, že T_{j+1} sa skladá z troch kópií T_j vo vrcholoch a „otočeného" trojuholníka zloženého zo samých núl v strede.

Predpokladajme, že n spĺňa podmienky zadania. Voľbou $m = 0$ dostaneme, že číslo $\binom{n}{k}$ musí byť nepárne pre každé $k \leqq n$. To znamená, že v príslušnom riadku Pascalovho trojuholníka sú len zvyšky 1, čomu vyhovujú len hodnoty $n = 2^j - 1$ pre $j = 0, 1, \dots$ (vyplýva to z vyššie uvedenej konštrukcie trojuholníkov T_j, formálne môžeme opäť použiť indukciu).



Obr. 4

Naopak, ak $n = 2^j - 1$, tak podmienka zo zadania je splnená. Zvyšky kombinačných čísel $\binom{n-k}{m}$ a $\binom{n-m}{k}$ sa totiž nachádzajú v T_j na pozíciách, ktoré sú súmerne združené vzhľadom na os uhla pri ľavom dolnom vrchole trojuholníka T_j. Stačí teda ukázať, že T_j je symetrický podľa tejto osi. Na to znova použijeme indukciu: Nech T_j je symetrický podľa uvedenej osi (pre malé hodnoty j to zjavne platí). Pozrime sa na trojuholník T_{j+1}. Keďže je rovnostranný, jeho os uhla je zároveň osou uhla ľavej dolnej kópie T_j aj vnútorného trojuholníka zloženého z núl (obr. 4). Na kópiách T_j je tak symetrický podľa indukčného predpokladu a prostredný trojuholník je podľa osi symetrický tiež, keďže sa skladá zo samých núl.

6. *Nech $n \geqq 6$ je celé číslo a $\mathcal{F}$ je systém 3-prvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ spĺňajúci nasledujúcu podmienku: pre každé $1 \leqq i < j \leqq n$ existuje aspoň $\lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1$ podmnožín $A \in \mathcal{F}$ takých, že $i, j \in A$. Dokážte, že pre niektoré celé číslo $m \geqq 1$ existujú navzájom disjunktné podmnožiny $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ také, že*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| \geqq n - 5.$$

(*Poľsko*)

Riešenie. (Podľa *Zhen Ning Davida Liu.*) Nech $\mathcal{M}$ je najväčší podsystém navzájom disjunktných množín systému $\mathcal{F}$. Označme S zjednotenie všetkých množín z $\mathcal{M}$. Ďalej označme $S' = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus S$, teda množinu tých prvkov, ktoré sa nenachádzajú v žiadnej množine z $\mathcal{M}$. Sporom ukážeme, že $|\mathcal{M}| \geqq \lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1$, čiže počet prvkov v S je aspoň $3(\lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1) \geqq n - 5$.

Ak sa prvky x a y nachádzajú v S', tak všetky také prvky z, pre ktoré množina $A = \{x, y, z\}$ je prvkom $\mathcal{F}$, musia ležať v S. Inak by sme totiž mohli zobrať množinu A a pridať ju do systému $\mathcal{M}$, čím by sme zväčšili jeho veľkosť.

Nech $|\mathcal{M}| < \lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1$. Potom $|S'| \geqq 6$, teda spomedzi prvkov množiny S' vieme vybrať tri disjunktné dvojprvkové množiny $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$ a $\{x_3, y_3\}$. Ukážeme, že pre niektoré dva rôzne indexy $i, j \in \{1, 2, 3\}$ existujú množiny

$$A = \{s_1, s_2, s_3\} \in \mathcal{M}, \qquad B = \{x_i, y_i, s_1\} \in \mathcal{F}, \qquad C = \{x_j, y_j, s_2\} \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

Potom v systéme $\mathcal{M}$ môžeme množinu A nahradiť množinami B a C, čím ho zväčšíme.

Nazývajme *dobrými trojicami* také množiny $A \in \mathcal{F}$, že pre niektoré $i \in \{1, 2, 3\}$ a $s \in S$ platí $A = \{x_i, y_i, s\}$. Ak žiadna trojica množín tvaru (1) neexistuje, tak prvky každej jednej množiny z $\mathcal{M}$ tvoria dobré trojice buď iba s jednou dvojicou $\{x_i, y_i\}$, alebo iba jeden prvok tejto množiny je v dobrej trojici s niektorými dvojicami $\{x_i, y_i\}$. V každom prípade na jednu množinu z $\mathcal{M}$ prislúchajú nanajvýš tri dobré trojice.

Z pohľadu dvojíc prvkov $\{x_i, y_i\}$ je však podľa zadania počet dobrých trojíc aspoň $3(\lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1)$, pretože, ako sme poznamenali na úvod, každý prvok, ktorý s niektorou dvojicou $\{x_i, y_i\}$ tvorí množinu z $\mathcal{F}$, leží v S. Z toho dostávame odhady

$$3|\mathcal{M}| \geqq \text{počet dobrých trojíc} \geqq 3(\lfloor \tfrac{1}{3}n \rfloor - 1),$$

čo je v spore s predpokladom, že $|\mathcal{M}| < \lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1$.