63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014

Riešenia úloh IMO

---

1. *Nech $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ je nekonečná postupnosť kladných celých čísel. Dokážte, že existuje práve jedno celé číslo $n \geqq 1$ také, že*

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leqq a_{n+1}.$$

(*Rakúsko*)

Riešenie. Označme B množinu tých prirodzených čísel n, pre ktoré je splnená prvá nerovnosť zo zadania, teda takých n, pre ktoré $a_n < (a_0+a_1+\dots+a_n)/n$. Ekvivalentnou úpravou tejto podmienky dostaneme

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_n - a_{n-2}) + \dots + (a_n - a_1) < a_0. \qquad (1)$$

Množina B má nasledovné tri vlastnosti:

- ▷ Je neprázdna, pretože zrejme $1 \in B$.
- ▷ Každý z $n-1$ sčítancov na ľavej strane (1) je aspoň 1, takže ak $n > a_0$, tak $n \notin B$. Preto B je konečná.
- ▷ Pri zväčšení n o 1 pribudne na ľavej strane (1) kladný sčítanec $a_{n+1} - a_n$ a navyše sa o túto hodnotu zväčší každý zo zvyšných sčítancov. Ľavá strana (1) sa tak s rastúcim n zväčšuje. Teda ak nejaké číslo patrí do B, patrí tam aj každé od neho menšie prirodzené číslo.

Z uvedeného vyplýva, že $B = \{1, 2, 3, \dots, n_0\}$ pre nejaké prirodzené číslo n_0.

Všimnime si, že druhá nerovnosť zo zadania $(a_0 + a_1 + \dots + a_n)/n \leqq a_{n+1}$ je ekvivalentná s podmienkou

$$a_0 \leqq (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+1} - a_{n-1}) + \dots + (a_{n+1} - a_1),$$

teda s tým, že $n + 1 \notin B$. Také n, ktoré spĺňa obe nerovnosti zo zadania, t. j. také, že $n \in B$ a súčasne $n + 1 \notin B$, je zrejme iba číslo n_0.

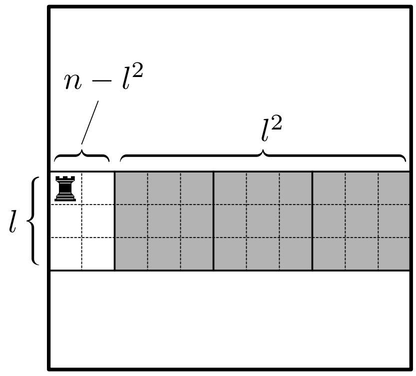
---

2. *Nech $n \geqq 2$ je celé číslo. Uvažujme šachovnicu s rozmermi $n \times n$ pozostávajúcu z n^2 jednotkových štvorcových políčok. Konfiguráciu n veží na tejto šachovnici nazývame šťastná, ak každý riadok a každý stĺpec obsahuje práve jednu vežu. Nájdite najväčšie kladné celé číslo k také, že pre každú šťastnú konfiguráciu n veží existuje štvorec s rozmermi $k \times k$, ktorý neobsahuje vežu na žiadnom zo svojich k^2 políčok.*

(*Chorvátsko*)

Riešenie. Hľadaná najväčšia hodnota je $k = \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor$. V prvej časti riešenia dokážeme, že ak $n > l^2$, tak každá šťastná konfigurácia obsahuje prázdny štvorec $l \times l$. V druhej časti potom ukážeme, že ak $n \leqq l^2$, tak existuje šťastná konfigurácia neobsahujúca žiadny prázdny štvorec $l \times l$. Z týchto dvoch tvrdení zrejme vyplýva uvedený záver.

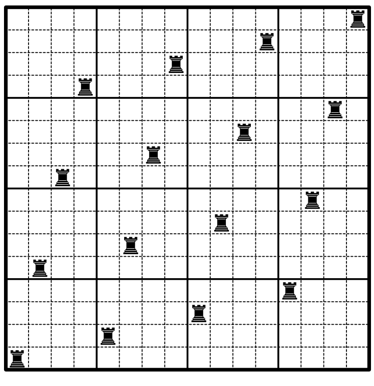
Nech teda $n > l^2$. Uvažujme ľubovoľnú šťastnú konfiguráciu. Zoberme blok l za sebou idúcich riadkov, medzi ktorými sa nachádza aj riadok obsahujúci vežu v prvom stĺpci. Spolu je v tomto bloku práve l veží. Následne z neho odstráňme prvých $n - l^2$ stĺpcov. Podľa nášho predpokladu je $n - l^2 \geqq 1$, takže sme uvedenou operáciou odobrali z bloku aspoň jednu vežu – tú, ktorá sa nachádza v prvom stĺpci. Zvyšných $l \times l^2$ políčok sa dá rozdeliť na l štvorcov s rozmermi $l \times l$ (obr. 1). Keďže je v nich spolu nanajvýš $l-1$ veží, aspoň jeden z nich neobsahuje vežu.



Obr. 1

V druhej časti predpokladajme, že $n \leqq l^2$. Najskôr zostrojíme šťastnú konfiguráciu bez prázdnych štvorcov pre prípad $n = l^2$ a potom ukážeme, ako ju modifikovať pre menšie hodnoty n.

Označme riadky a stĺpce šachovnice s rozmermi $l^2 \times l^2$ číslami od 0 po $l^2 - 1$. Políčko v s-tom stĺpci a r-tom riadku budeme označovať súradnicami (s, r). Rozložme veže na políčka so súradnicami $(il + j, jl + i)$ pre všetky dvojice $i, j \in \{0, 1, \dots, l - 1\}$ (na obr. 2 je zobrazená táto konfigurácia pre $l = 4$; stĺpce sú číslované zľava doprava, riadky zdola nahor). Keďže každé číslo od 0 po $l^2 - 1$ sa dá práve jedným spôsobom zapísať v tvare $il + j$, kde $0 \leqq i, j \leqq l - 1$, v každom stĺpci sa nachádza práve jedna veža a rovnaký záver platí pre riadky.[1] Preto táto konfigurácia je šťastná.



Obr. 2

Dokážeme, že v každom štvorci $l \times l$ tejto konfigurácie sa nachádza aspoň jedna veža. Uvažujme ľubovoľný taký štvorec a zoberme l po sebe idúcich stĺpcov, ktoré ho obsahujú. Povedzme, že prvý z nich má číslo $pl + q$, kde $0 \leqq p, q \leqq l - 1$ (platí teda $pl + q \leqq l^2 - l$). Potom čísla riadkov, v ktorých sa nachádzajú veže z týchto stĺpcov, sú

[1] Uvedená jednoznačnosť zápisu vyplýva z faktu, že ak $s = il + j$, tak j je zvyšok čísla s po delení číslom l a i je celočíselný podiel tohto delenia.

$ql+p$, $(q+1)l+p$, $\dots$, $(l-1)l+p$, $p+1$, $l+(p+1)$, $\dots$, $(q-1)l+(p+1)$. Ak ich zapíšeme od najmenšieho po najväčšie, dostaneme postupnosť

$$p+1,\ l+(p+1),\ \dots,\ (q-1)l+(p+1),\ ql+p,\ (q+1)l+p,\ \dots,\ (l-1)l+p. \tag{1}$$

Ľahko nahliadneme, že najmenší člen tejto postupnosti má hodnotu nanajvýš $l-1$ (ak totiž $p=l-1$, tak $q=0$ a postupnosť začína členom $ql+p=l-1$), najväčší člen má hodnotu aspoň $l(l-1)$ a rozdiel medzi ľubovoľnými po sebe idúcimi členmi neprevyšuje l. Preto niektorý z l po sebe idúcich riadkov prechádzajúcich uvažovaným štvorcom $l \times l$ má číslo uvedené v (1), a teda veža z tohto riadku leží v danom štvorci.

Ostáva zostrojiť šťastnú konfiguráciu bez prázdnych štvorcov v prípade $n < l^2$. Za tým účelom zväčšíme šachovnicu na rozmery $l^2 \times l^2$ a vyplníme ju ako vyššie. Následne odoberieme pridané riadky a stĺpce. Môže sa stať, že v niektorých riadkoch a stĺpcoch nebudú veže. Avšak riadkov bez veží bude práve toľko ako stĺpcov bez veží, takže postupným doplnením veží na priesečníky prázdnych riadkov a stĺpcov vytvoríme šťastnú konfiguráciu. Keďže neexistoval prázdny štvorec $l \times l$ v šachovnici rozšírenej na rozmer $l^2 \times l^2$, nenájdeme ho ani v tejto výslednej konfigurácii.

---

3. *V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle CDA| = 90^\circ$. Bod H je pätou kolmice z bodu A na priamku BD. Body S, T ležia postupne na stranách AB, AD, pričom bod H je vnútorným bodom trojuholníka SCT a platí*

$$|\measuredangle CHS| - |\measuredangle CSB| = 90^\circ, \quad |\measuredangle THC| - |\measuredangle DTC| = 90^\circ.$$

Dokážte, že priamka BD sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku TSH. (Irán)

Riešenie. Označme Q priesečník priamky AB s kolmicou na priamku SC vedenou bodom C. Potom

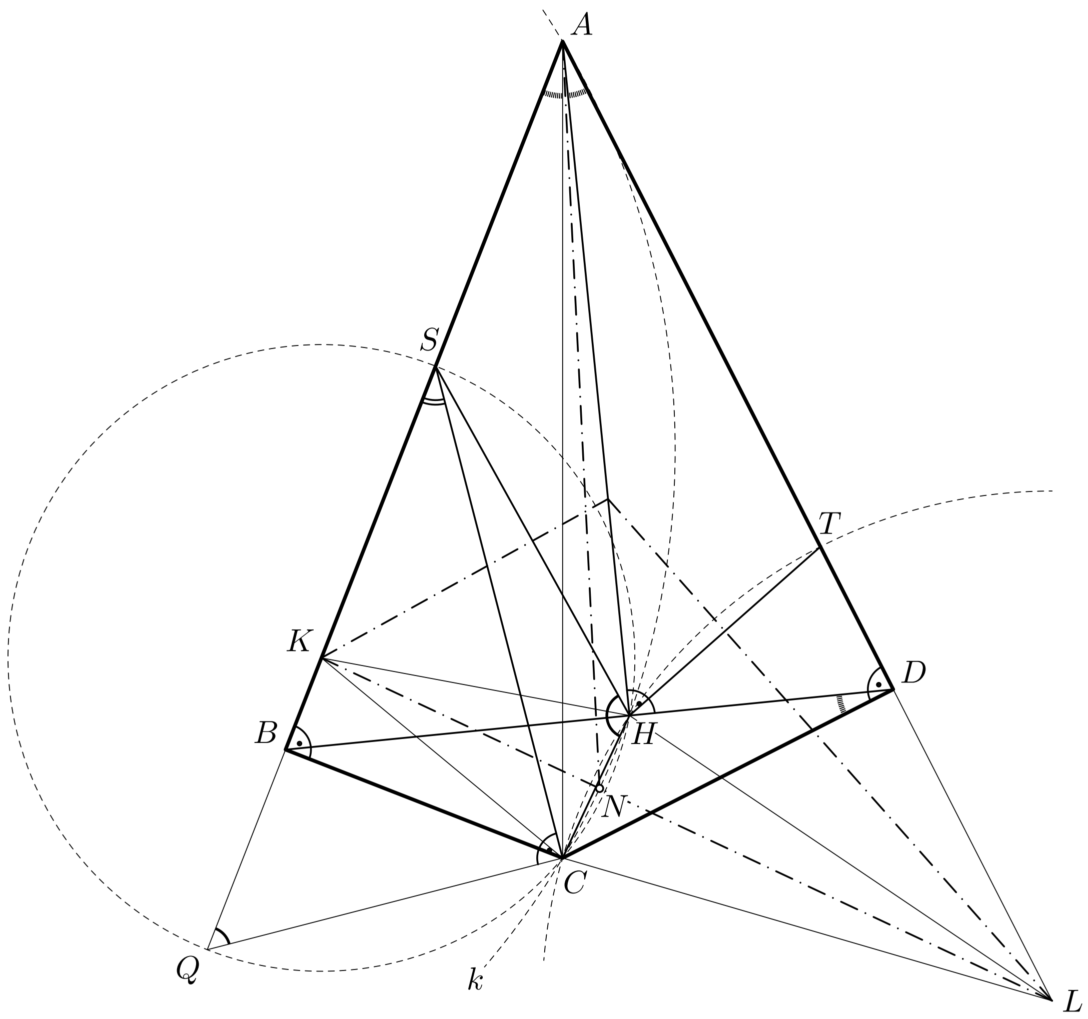
$$|\measuredangle SQC| = 90^\circ - |\measuredangle CSB| = 180^\circ - |\measuredangle CHS|,$$

teda štvoruholník $SQCH$ je tetivový. Jeho opísanou kružnicou je Tálesova kružnica nad priemerom SQ, ktorej stred ležiaci na priamke AB označme K (obr. 3). Analogicky stred kružnice opísanej trojuholníku THC, ktorý označíme L, leží na priamke AD.

Na vyriešenie úlohy stačí ukázať, že priesečník osí úsečiek SH a TH leží na priamke AH. Keďže $|KH| = |KS|$, je os úsečky SH zároveň osou uhla AKH; podobne os úsečky TH je osou uhla ALH. Aby sme dokázali, že osi uhlov AKH a ALH delia úsečku AH v rovnakom pomere, stačí podľa známeho tvrdenia o osi uhla v trojuholníku[2] dokázať, že

$$\frac{|AK|}{|KH|} = \frac{|AL|}{|LH|}. \tag{1}$$

[2] Os vnútorného uhla trojuholníka delí protiľahlú stranu v pomere strán priľahlých. Tento poznatok možno odvodiť jednoducho napr. použitím sínusovej vety pre trojuholníky, na ktoré delí os uhla pôvodný trojuholník.



Obr. 3

Ak body A, H, C ležia na jednej priamke, uvedená rovnosť vyplýva zo symetrie (štvoruholník $ABCD$ je vtedy deltoid). V opačnom prípade uvažujme kružnicu k, ktorá cez ne prechádza. Keďže uhly pri vrcholoch B a D sú pravé, je štvoruholník $ABCD$ tetivový, preto

$$|\measuredangle BAC| = |\measuredangle BDC| = 90^\circ - |\measuredangle ADH| = |\measuredangle HAD|.$$

Nech $N \neq A$ je priesečník kružnice k s osou uhla CAH. Z práve odvodenej rovnosti uhlov potom dostávame, že AN je zároveň osou uhla BAD. Zrejme body H a C sú súmerne združené podľa priamky KL a $|HN| = |NC|$. Z toho vyplýva, že bod N aj stred kružnice k ležia na priamke KL. Navyše z rovnakého tvrdenia o osi uhla, ktoré sme použili pred chvíľou, máme $|KN|/|NL| = |AK|/|AL|$. Uvedené skutočnosti znamenajú, že k je Apollóniovou kružnicou prislúchajúcou bodom K a L, odkiaľ už priamo dostaneme rovnosť (1).

---

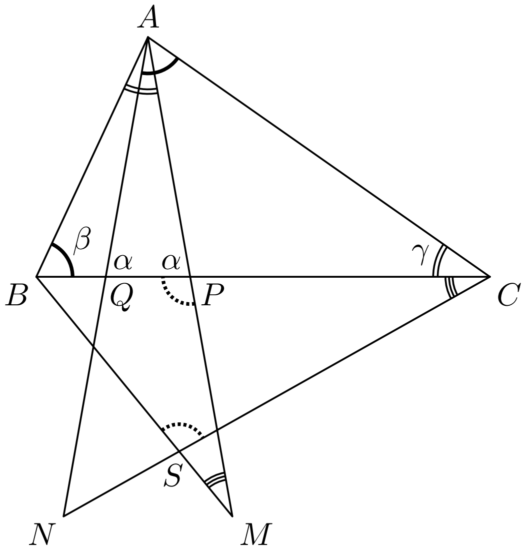
4. *Na strane BC daného ostrouhlého trojuholníka ABC ležia body P, Q, pričom $|\measuredangle PAB| = |\measuredangle BCA|$ a $|\measuredangle CAQ| = |\measuredangle ABC|$. Body M a N ležia postupne na priamkach AP a AQ tak, že bod P je stredom úsečky AM a bod Q je stredom úsečky AN. Dokážte,* *že priamky BM a CN sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC.*

(*Gruzínsko*)

Riešenie. Označme S priesečník priamok BM a CN. Podľa zadania majú trojuholníky PBA a QAC veľkosti uhlov rovnaké ako trojuholník ABC (budeme ich označovať štandardne α, β, γ), sú teda navzájom podobné. Odtiaľ

$$\frac{|BP|}{|PM|} = \frac{|BP|}{|PA|} = \frac{|AQ|}{|QC|} = \frac{|NQ|}{|QC|}.$$

Pritom $|\measuredangle BPM| = |\measuredangle NQC| = 180 - \alpha$, pretože sú to uhly susedné k uhlom pri vrcholoch P a Q uvedených podobných trojuholníkov (obr. 4). Trojuholníky BPM a NQC majú zhodné uhly pri vrcholoch P a Q aj pomery dĺžok strán, ktoré tieto uhly zvierajú, takže sú podobné. Preto $|\measuredangle BMP| = |\measuredangle NCQ|$ a aj trojuholníky BPM a BSC sú podobné. Z toho dostávame $|\measuredangle CSB| = |\measuredangle BPM| = 180^\circ - \alpha$, teda štvoruholník $ABSC$ je tetivový.



Obr. 4

---

5. *Banka v Kapskom Meste razí mince s hodnotou $1/n$ pre každé kladné celé číslo n. Majme konečnú kolekciu takýchto mincí (nie nutne s rôznymi hodnotami), ktorá má celkovú hodnotu nanajvýš $99 + \frac{1}{2}$. Dokážte, že túto kolekciu možno rozdeliť na 100 alebo menej častí tak, aby každá časť mala celkovú hodnotu nanajvýš 1.* (*Luxembursko*)

Riešenie. Dokážeme všeobecnejšie tvrdenie: Pre každé kladné celé číslo N sa mince s celkovou hodnotou nanajvýš $N - \frac{1}{2}$ dajú rozdeliť na N častí tak, aby každá časť mala celkovú hodnotu nanajvýš 1 (pripúšťame aj „prázdne“ časti s hodnotou 0).

Uvažujme teda ľubovoľnú kolekciu mincí s hodnotou nanajvýš $N - \frac{1}{2}$. Pred samotným delením na časti kolekciu mierne modifikujeme. Pokiaľ niekoľko mincí dokopy má celkovú hodnotu $1/k$, nahradíme ich jednou mincou tejto hodnoty. Ak sa bude dať zmenená kolekcia rozdeliť požadovaným spôsobom, tak sa samozrejme dá rozdeliť aj pôvodná. Po každej modifikácii počet mincí v kolekcii klesá, takže raz tento proces musí skončiť – vtedy už nevieme vykonať žiadne opísané „zlučovanie“ mincí. Z toho vyplýva, že pre každé párne k existuje len jedna minca s hodnotou $1/k$ (inak by sme dve mince s touto hodnotou vedeli nahradiť jednou mincou s hodnotou $1/\frac{k}{2}$) a pre každé nepárne $k > 1$ existuje najviac $k - 1$ mincí s hodnotou $1/k$ (inak by sme k takých mincí vedeli nahradiť mincou s hodnotou 1).

Každá minca s hodnotou 1 musí sama tvoriť jednu z N častí. Ak máme d mincí s hodnotou 1, stačí ich odobrať a v tvrdení nahradiť N hodnotou $N - d$. Môžeme teda predpokladať, že v kolekcii nemáme žiadne mince s hodnotou 1.

Za týchto predpokladov rozdeľme mince nasledovne: Pre každé $k = 1, 2, \ldots, N$ dajme všetky mince s hodnotami $1/(2k-1)$ a $1/(2k)$ do skupiny C_k. Celková hodnota skupiny C_k bude nanajvýš

$$(2k-2) \cdot \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} = 1 - \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) < 1.$$

Ostáva rozdeliť mince s hodnotami menšími ako $1/(2N)$. Budeme ich pridávať po jednej opakovaním nasledujúceho kroku. Zoberme ľubovoľnú mincu čo zostala. Celková hodnota už rozdelených mincí je maximálne $N - \frac{1}{2}$, takže existuje časť s celkovou hodnotou nanajvýš

$$\frac{N - \frac{1}{2}}{N} = 1 - \frac{1}{2N},$$

do ktorej je možné našu mincu pridať bez prekročenia stanoveného limitu.

Poznámka. Algoritmus rozdelenia mincí s hodnotami aspoň $1/(2N)$ sa dá modifikovať: napr. do časti C_k môžeme dať všetky mince s hodnotami $1/[2^s(2k-1)]$ pre všetky celé čísla $s \geqq 0$. Ľahko možno nahliadnuť, že ich hodnota neprekročí 1.

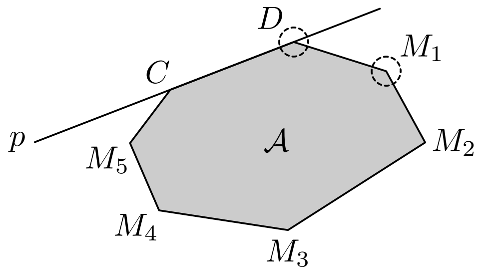
---

6. *Hovoríme, že priamky v rovine sú vo všeobecnej polohe, ak žiadne dve nie sú rovnobežné a žiadne tri neprechádzajú jedným bodom. Množina priamok vo všeobecnej polohe rozdeľuje rovinu na oblasti, z ktorých niektoré majú konečný obsah; nazývame ich konečné oblasti prislúchajúce danej množine priamok. Pre každé dostatočne veľké n dokážte, že v ľubovoľnej množine n priamok vo všeobecnej polohe je možné zafarbiť aspoň $\sqrt{n}$ priamok modrou farbou tak, že žiadna z prislúchajúcich konečných oblastí nebude mať celú hranicu modrú.* (*Rakúsko*)

Riešenie. Nech P je ľubovoľná množina n priamok vo všeobecnej polohe. Označme F množinu konečných oblastí prislúchajúcich množine P. Zoberme maximálnu (vzhľadom na inklúziu) podmnožinu $\mathsf{Q} \subseteq \mathsf{P}$ takú, že po zafarbení priamok z Q namodro žiadna oblasť z F nebude mať celú hranicu modrú. Položme $k = |\mathsf{Q}|$. Stačí dokázať, že $k \geqq \sqrt{n}$.

Zafarbime priamky z $\mathsf{P} \setminus \mathsf{Q}$ načerveno. Priesečníky dvoch modrých priamok budeme nazývať *modré* body a priesečníky modrých priamok s červenými priamkami *dvojfarebné* body. Modrých bodov je zrejme $\binom{k}{2}$ a červených priamok $n - k$.

Uvažujme ľubovoľnú červenú priamku p. Nech $\mathcal{A} \in \mathsf{F}$ je taká oblasť, ktorá má práve jednu červenú stranu a tá leží na p (ak by taká oblasť neexistovala, mohli by sme priamku p pridať do Q, čo je v spore s maximálnosťou množiny Q). Označme C, D, M_1, M_2, $\ldots$, M_l vrcholy oblasti $\mathcal{A}$ v smere hodinových ručičiek, pričom $C, D \in p$. Potom body C, D sú dvojfarebné, zatiaľ čo body M_1, M_2, $\ldots$, M_l sú modré. Budeme hovoriť, že priamka p je *pridružená* k bodu M_1 *cez* bod D (obr. 5).



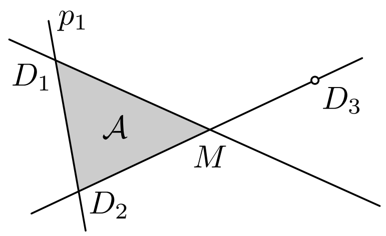
Obr. 5

Všimnime si, že pre každú dvojicu tvorenú dvojfarebným bodom D a modrým bodom M môže byť k M cez D pridružená nanajvýš jedna červená priamka, pretože existuje nanajvýš jedna oblasť $\mathcal{A}$, ktorá má body D a M umiestnené na svojom obvode v smere hodinových ručičiek. Ukážeme, že k žiadnemu modrému bodu nie sú pridružené viac ako dve červené priamky. Z toho dostaneme odhad

$$n - k \leqq 2\binom{k}{2},$$

ktorý je ekvivalentný so želanou nerovnosťou $n \leqq k^2$.

Predpokladajme sporom, že tri rôzne priamky p_1, p_2, p_3 sú pridružené k modrému bodu M postupne cez rôzne dvojfarebné body D_1, D_2, D_3. Bodom M prechádzajú dve modré priamky, ktoré určujú štyri polpriamky. Zrejme každý z bodov D_i leží na jednej z nich (každý na inej) a je najbližším bodom k M spomedzi všetkých priesečníkov ležiacich na tejto polpriamke. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že D_2 a D_3 ležia na navzájom opačných polpriamkach. Uvažujme oblasť $\mathcal{A}$, vzhľadom na ktorú



Obr. 6

je p_1 pridružená k M cez D_1. Jej tri po sebe idúce vrcholy sú D_1, M a jeden z vrcholov D_2, D_3, povedzme D_2. Keďže oblasť $\mathcal{A}$ má iba jednu červenú stranu, musí to byť strana D_2D_1, t. j. $\mathcal{A}$ je trojuholník D_2D_1M (obr. 6). To je však spor s tým, že priamky p_1 a p_2 sú rôzne.