63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh MEMO*

I-1. *Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že*

$$xf(y) + f\big(xf(y)\big) - xf\big(f(y)\big) - f(xy) = 2x + f(y) - f(x+y)$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (*Litva*)

Riešenie. Ukážeme, že jedinými riešeniami spĺňajúcimi podmienky zo zadania sú funkcie tvaru $f(x) = 2x + a$, kde a je ľubovoľné reálne číslo.

Označme $f(1) = c$. Po dosadení $x = 1$ do rovnosti zo zadania dostávame

$$0 = 2 + f(y) - f(y+1),$$
$$f(y+1) = f(y) + 2$$

pre všetky $y \in \mathbb{R}$. Použitím matematickej indukcie v oboch smeroch dostávame

$$f(y+n) = f(y) + 2n \tag{1}$$

pre všetky $y \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$.

Dosadením $y = 1$ do rovnosti zo zadania dostávame

$$cx + f(cx) - xf(c) - f(x) = 2x + c - (f(x) + 2),$$

čo môžeme upraviť na tvar

$$f(cx) = x(f(c) - c + 2) + c - 2.$$

Ak $c \neq 0$, môžeme nahradiť x neznámou z/c, z čoho už vidno, že f je lineárna funkcia. Z rovnosti (1) však vidíme, že smernica funkcie f musí byť 2. Preto funkcia f môže byť jedine tvaru $f(x) = 2x + a$.

Predpokladajme teraz, že $c = 0$. Z rovnice (1) dostávame

$$f(n) = f(1 + (n-1)) = f(1) + 2(n-1) = c + 2n - 2 = 2n - 2$$

pre akékoľvek celé číslo n. Dosadením celého čísla $y = n$ do rovnice zo zadania dostávame

$$(2n-2)x + f((2n-2)x) - (4n-6)x - f(nx) = 2x + (2n-2) - f(x) - 2n,$$
$$f((2n-2)x) - f(nx) + f(x) = (2n-2)x - 2. \tag{2}$$

V prípade $n = 0$ sa rovnosť zjednoduší na tvar

$$f(-2x) + f(x) = -2x + 4.$$

Dosadením $-2x$ za x a odčítaním od predchádzajúcej rovnosti dostávame

$$f(4x) - f(x) = (f(4x) + f(-2x)) - (f(-2x) + f(x)) = (4x - 4) - (-2x - 4) = 6x. \tag{3}$$

Dosadením $n = -1$ do (2) a $x = -x$ do (3) dostávame

$$f(-4x) - f(-x) + f(x) = -4x - 2,$$
$$f(-4x) - f(-x) = -6x.$$

Odčítaním posledných dvoch rovností dostávame $f(x) = 2x - 2$, teda opäť funkciu tvaru $f(x) = 2x + a$.

Dosadením $f(x) = 2x + a$ do rovnice zo zadania jednoducho overíme, že takáto funkcia je naozaj riešením pre ľubovoľné $a \in \mathbb{R}$.

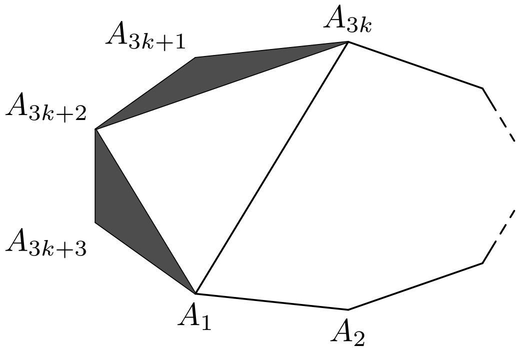
I-2. *Daný je pravidelný n-uholník, ktorý rozrežeme na $n-2$ trojuholníkov pomocou $n-3$ rezov pozdĺž uhlopriečok, ktoré sa navzájom nepretínajú vo vnútri n-uholníka. Nech dvojfarebná triangulácia je také rozrezanie n-uholníka, v ktorom každý trojuholník je ofarbený čiernou alebo bielou farbou a každé dva trojuholníky so spoločnou stranou majú rôzne farby. Celé číslo $n \geqq 3$ nazývame triangulárne, ak pre pravidelný n-uholník existuje dvojfarebná triangulácia taká, že pre každý vrchol A daného n-uholníka je počet čiernych trojuholníkov s vrcholom A väčší ako počet bielych trojuholníkov s vrcholom A. Nájdite všetky triangulárne čísla.* (*Chorvátsko*)

Riešenie. Najskôr ukážeme, že všetky triangulárne čísla sú deliteľné tromi. Nech n je triangulárne číslo. Uvažujme takú dvojfarebnú trianguláciu pravidelného n-uholníka, ktorá spĺňa podmienky zo zadania. Celkový počet strán bielych trojuholníkov triangulácie označme b. Keďže trojuholníky majú tri strany a žiadne dva biele trojuholníky nemajú spoločnú stranu, číslo b musí byť deliteľné tromi.

Pozrime sa teraz bližšie na ľubovoľný vrchol A. Trojuholníky pri vrchole A sú striedavo biele a čierne, pričom prvý a posledný trojuholník musí byť čierny, aby bola splnená podmienka zo zadania. Preto sú strany bielych trojuholníkov zároveň uhlopriečkami n-uholníka.

Rovnako dostaneme, že počet strán c čiernych trojuholníkov je deliteľný tromi. Každá uhlopriečka n-uholníka použitá pri triangulácii je súčasne stranou bieleho aj čierneho trojuholníka a navyše všetky strany n-uholníka sú stranami čiernych trojuholníkov, preto $c = n + b$. Keďže c a b sú deliteľné tromi, musí byť tromi deliteľné aj n.

V druhej časti dokážeme, že pre ľubovoľné prirodzené číslo k a pre $n = 3k$ existuje dvojfarebná triangulácia spĺňajúca podmienky zo zadania, a to nielen pre pravidelný, ale pre ľubovoľný konvexný n-uholník.

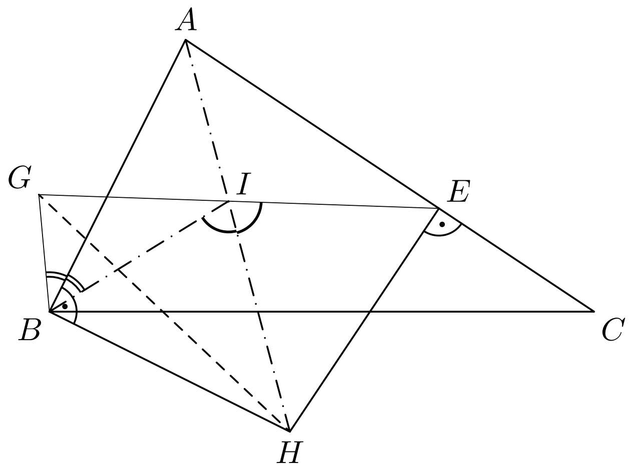


Obr. 1

Dôkaz prevedieme indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 1$ máme len jeden trojuholník, ktorý po ofarbení čiernou farbou tvorí trianguláciu spĺňajúcu podmienky zo zadania. Nech teda tvrdenie platí pre nejaké k. Uvažujme ľubovoľný $3(k+1)$-uholník $P = A_1A_2\dots A_{3(k+1)}$. Na $3k$-uholník $A_1A_2\dots A_{3k}$ použijeme indukčný predpoklad, t. j. predpokladáme, že v ňom je vytvorená dvojfarebná triangulácia spĺňajúca podmienky zadania. Z prvej časti riešenia vieme, že trojuholník so stranou A_1A_{3k} je v nej ofarbený čiernou farbou. Do triangulácie mnohouholníka P pridáme uhlopriečky A_1A_{3k+2} a $A_{3k}A_{3k+2}$, trojuholník $A_1A_{3k}A_{3k+2}$ ofarbíme bielou farbou a trojuholníky $A_{3k}A_{3k+1}A_{3k+2}$ a $A_1A_{3k+2}A_{3k+3}$ ofarbíme čiernou farbou (obr. 1). Takto vznikne dvojfarebná triangulácia $3(k+1)$-uholníka, ktorá (ako možno ľahko nahliadnuť) spĺňa podmienky zo zadania.

I-3. *Daný je trojuholník ABC so stredom I kružnice vpísanej, pričom $|AB| < |AC|$. Označme E bod na strane AC taký, že $|AE| = |AB|$. Nech G je bod na priamke EI taký, že $|\measuredangle IBG| = |\measuredangle CBA|$ a bod I leží medzi bodmi E a G. Dokážte, že priamka AI, kolmica na AE v bode E a os uhla BGI sa pretínajú v jednom bode.* (*Chorvátsko*)

Riešenie. Nech H je priesečník kolmice na AE vedenej bodom E a priamky AI. Naším cieľom bude ukázať, že bod H je stredom kružnice pripísanej k strane BI trojuholníka BIG a teda leží na osi uhla BGI.



Obr. 2

Osová súmernosť podľa priamky AI zobrazí bod E na bod B a teda AI je osou uhla BIE a zároveň uhol HBA je zhodný s uhlom HEA, čiže pravý (obr. 2). Označme $|\measuredangle ABC| = \beta$. Zo zadania vieme, že $|\measuredangle IBG| = \beta$ a $|\measuredangle ABI| = \beta/2$. Preto $|\measuredangle IBH| = 90^\circ - |\measuredangle GBI|/2$, z čoho vyplýva, že H leží na osi vonkajšieho uhla pri vrchole B v trojuholníku BIG. Z toho už dostávame dokazované tvrdenie.

I-4. *Pre celé čísla $n \geqq k \geqq 0$ definujme bibinomický koeficient $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ ako*[1]

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{n!!}{k!!(n-k)!!}.$$

Nájdite všetky dvojice (n, k) celých čísel $n \geqq k \geqq 0$ také, že prislúchajúci bibinomický koeficient je celé číslo. (*Rakúsko*)

Riešenie. Dvojice (n, k) spĺňajú podmienky zo zadania práve vtedy, keď $(n, k) = (2, 1)$, $k \in \{0, n\}$ alebo n a k sú párne.

[1] „Dvojitý“ faktoriál $n!!$ je definovaný ako súčin všetkých párnych čísel od 2 po n, ak n je párne, a ako súčin všetkých nepárnych čísel od 1 po n, ak n je nepárne. Napríklad $0!! = 1$, $4!! = 2 \cdot 4 = 8$ a $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Najskôr ukážeme, že dvojice popísané vyššie skutočne spĺňajú podmienky zo zadania. Zrejme $\left(\!\binom{2}{1}\!\right) = 2$ a pre všetky nezáporné celé čísla n máme

$$\left(\!\!\binom{n}{0}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n}{n}\!\!\right) = \frac{n!!}{n!! \cdot 0!!} = 1.$$

Napokon, ak n a k sú párne čísla, označme $n = 2n'$ a $k = 2k'$. Potom

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \frac{(2n')!!}{(2k')!!(2(n'-k'))!!} = \frac{2^{n'}n'!}{2^{k'}k'!2^{n'-k'}(n'-k')!} = \binom{n'}{k'},$$

čo očividne je celé číslo.

Ostáva ukázať, že žiadne ďalšie dvojice zadaniu nevyhovujú. Nech n a k sú také celé nezáporné čísla, že $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ je celé číslo. Rozlíšime dva prípady v závislosti od parity n.

Nech n je nepárne číslo. V takom prípade $k = 0$ alebo $k = n$. V opačnom prípade je totiž jedno z čísel k, $n-k$ párne kladné celé číslo a preto aj menovateľ rozpísaného výrazu $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ je párny, zatiaľ čo čitateľ je nepárny.

Nech n je párne číslo. Na úvod sme ukázali, že v prípadoch $n = 0$ a $n = 2$ môže byť k ľubovoľné nezáporné celé číslo, ktoré spĺňa $k \leqq n$. Predpokladajme preto, že $n \geqq 4$. Označme $n = 2m$ a nech k je nepárne. Zo symetrie vyplýva $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n}{n-k}\!\right)$, takže sa stačí obmedziť na prípady, keď $1 \leqq k \leqq m$. Pre $j \in \{1, 2, \ldots, m-k\}$ je splnená nerovnosť $k + j < k + 2j$ a preto

$$\prod_{j=1}^{m-k}(k+j) \leqq \prod_{j=1}^{m-k}(k+2j),$$

pričom rovnosť nastáva pre $m = k$. Ďalej použijeme aj nerovnosť $(k-1)!! \leqq k!!$, v ktorej nastáva rovnosť pre $k = 1$. Vynásobením posledných dvoch nerovností dostávame

$$(k-1)!!\frac{m!}{k!} \leqq k!!\frac{(2m-k)!!}{k!!} = (2m-k)!!,$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $m = k = 1$, čo nastáva pre $n = 2$. V tejto časti však predpokladáme, že $n \geqq 4$ a preto v poslednej nerovnosti rovnosť nikdy nenastáva. Prenásobením $k!!$ a použitím rovnosti $(k-1)!!k!! = k!$ dostávame $m! < k!!(2m-k)!!$, čo znamená, že podiel

$$\frac{m!}{k!!(2m-k)!!}$$

nemôže byť celé číslo. Keďže menovateľ je nepárny, podiel

$$\frac{2^m m!}{k!!(2m-k)!!} = \frac{n!!}{k!!(2m-k)!!} = \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$$

taktiež nemôže byť celé číslo. Preto v prípade, že $n \geqq 4$ je párne a $0 < k < n$ je nepárne, riešenie neexistuje.

T-1. *Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu*

$$\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+y}+\frac{1}{b+x}+\frac{1}{b+y},$$

kde a, b, x a y sú kladné reálne čísla spĺňajúce nerovnosti

$$\frac{1}{a+x}\geqq\frac{1}{2},\qquad\frac{1}{a+y}\geqq\frac{1}{2},\qquad\frac{1}{b+x}\geqq\frac{1}{2},\qquad\frac{1}{b+y}\geqq 1.$$

(*Maďarsko*)

Riešenie. Ukážeme, že najmenšia možná hodnota je $\frac{17}{6}$.

Ak $a=x=1$ a $b=y=\frac{1}{2}$, potom

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{2},\quad\frac{1}{a+y}=\frac{2}{3},\quad\frac{1}{b+x}=\frac{2}{3},\quad\frac{1}{b+y}=1.$$

Podmienky sú splnené a navyše súčet týchto štyroch zlomkov je

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+1=\frac{17}{6}$$

a teda $\frac{17}{6}$ je naozaj možná hodnota výrazu za splnenia predpokladov.

Nech a, b, x a y sú kladné reálne čísla spĺňajúce zadané nerovnosti. Z prvej a štvrtej podmienky máme

$$a+b+x+y=(a+x)+(b+y)\leqq 2+1=3.$$

Z nerovnosti medzi aritmetickým a harmonickým priemerom dvoch kladných reálnych čísel dostávame

$$\frac{2}{\frac{1}{a+y}+\frac{1}{b+x}}\leqq\frac{(a+y)+(b+x)}{2}=\frac{a+b+x+y}{2}\leqq\frac{3}{2}.$$

Z toho úpravou obdržíme nerovnosť

$$\frac{1}{a+y}+\frac{1}{b+x}\geqq\frac{4}{3}.$$

Pridaním prvej a štvrtej nerovnosti dostávame

$$\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+y}+\frac{1}{b+x}+\frac{1}{b+y}\geqq\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1=\frac{17}{6}.$$

T-2. *Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že*

$$xf(xy) + xyf(x) \geqq f(x^2)f(y) + x^2y$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (*Česká rep., Pavel Calábek*)

Riešenie. Ukážeme, že jediné funkcie spĺňajúce podmienky zo zadania sú funkcie v tvare

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \geqq 0, \\ kx, & \text{ak } x \leqq 0, \end{cases}$$

pričom k je ľubovoľné reálne číslo spĺňajúce $k \geqq 1$.

Nech f je funkcia vyhovujúca zadaniu. Dosadením $x = y$ dostávame

$$0 \geqq (f(x^2) - x^2)(f(x) - x). \tag{1}$$

Špeciálne pre $x = 1$ a $x = 0$ máme $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Po dosadení $y = 1$ do pôvodnej nerovnosti dostávame

$$2xf(x) \geqq f(x^2) + x^2 \tag{2}$$

pre všetky reálne čísla x.

Najskôr ukážeme, že $f(x) = x$ pre $x \geqq 0$. Uvažujme dva prípady.

- ▷ Predpokladajme, že $f(x) < x$. Z nerovnosti (2) dostávame $0 > f(x^2) - x^2$. Použitím tejto nerovnosti dostávame $0 < (f(x^2) - x^2)(f(x) - x)$, čo je v spore s nerovnosťou (1). Preto $f(x) \geqq x$ pre všetky $x \geqq 0$.
- ▷ Predpokladajme, že $f(x^2) > x^2$. Z nerovnosti (2) dostávame $0 < f(x) - x$. Použitím tejto nerovnosti dostávame $0 < (f(x^2) - x^2)(f(x) - x)$, čo je opäť v spore s nerovnosťou (1). Preto $f(x^2) \leqq x^2$ pre všetky $x \geqq 0$. Dosadením $\sqrt{x}$ za x dostávame $f(x) \leqq x$ pre všetky $x \geqq 0$.

Z uvedených prípadov vidíme, že jediné riešenie pre $x \geqq 0$ je $f(x) = x$.

Pozrime sa teraz na prípad, keď x a y sú záporné čísla. Z nerovnosti zo zadania a použitím $f(x) = x$ pre $x \geqq 0$ dostávame nerovnosť $x^2y + xyf(x) \geqq x^2f(y) + x^2y$. Po vydelení tejto nerovnosti záporným číslom x^2y dostávame

$$\frac{f(x)}{x} \leqq \frac{f(y)}{y}.$$

V ostatnej nerovnosti musí nastať rovnosť vďaka symetrii. Preto $f(x) = kx$ pre nejaké pevne zvolené reálne číslo k. Po dosadení $x = -1$ a $y = 1$ do pôvodnej nerovnosti dostávame podmienku $k \geqq 1$. Preto riešením pre $x \leqq 0$ môže byť len funkcia tvaru $f(x) = kx$ pre pevne zvolené $k \geqq 1$.

Dosadením tohto riešenia do pôvodnej nerovnosti ľahko nahliadneme, že je splnená.

T-3. *Nech K a L sú prirodzené čísla. Na šachovnici pozostávajúcej z $2K \times 2L$ políčok sa pohybuje mravec. Začína v ľavom dolnom políčku a presúva sa do pravého horného políčka. V každom kroku sa presunie na susedné políčko vo vodorovnom alebo zvislom smere a každé z políčok pri svojom presune navštívi nanajvýš raz. V niektorých prípadoch nenavštívené políčka tvoria pravouholník – taký nazývame* MEMO*rovaný. Určte počet všetkých rôznych* MEMO*rovaných pravouholníkov. (Pravouholníky sú rôzne, pokiaľ nepozostávajú z tých istých políčok.)* (*Rakúsko*)

Riešenie. Predpokladajme, že políčka šachovnice sú ofarbené striedavo čiernou a bielou farbou tak, že políčko, na ktorom mravec začína, je čierne. Najskôr ukážeme, že MEMOrované sú práve tie pravouholníky, ktoré majú všetky rohové políčka biele. V druhej časti určíme počet pravouholníkov s bielymi rohmi.

Zaveďme súradnicovú sústavu na šachovnici tak, že čierne políčko, na ktorom mravec začína, má súradnice $(1,1)$, jednotková dĺžka je zhodná s dĺžkou strany jedného políčka a x-ová os je rovnobežná so spodnou stranou šachovnice. Keďže mravec začína a končí na čiernom políčku, počet čiernych políčok, ktoré mravec počas presunu navštívi, je o 1 viac ako počet bielych políčok, ktoré navštívi. Preto na šachovnici ostane nepárny počet nenavštívených políčok a bielych bude medzi nimi o 1 viac ako čiernych. Z toho vyplýva, že MEMOrovaný pravouholník musí mať strany nepárnej dĺžky a rohy bielej farby.

Ďalej ukážeme, že každý pravouholník spĺňajúci vyššie popísané podmienky je MEMOrovaný. Budeme postupovať indukciou vzhľadom na $K + L$. Pre $K = L = 1$ pozostávajú oba prípustné pravouholníky len z jedného políčka. Pre oba jednoducho nájdeme cestu, ktorou mravec mohol ísť. Predpokladajme preto, že $K + L \geqq 3$. Uvažujme ľubovoľný prípustný pravouholník. Nech jeho ľavý dolný roh má súradnice (a,b). Ak $a \geqq 3$, tak mravec môže na začiatku svojej cesty prejsť ľavé dva stĺpce, čím sa šachovnica zmenší o dva stĺpce a mravec sa bude nachádzať na políčku $(3,1)$. Na túto situáciu môžeme použiť indukčný predpoklad. Preto môžeme predpokladať, že $a < 3$. Analogicky môžeme predpokladať, že $b < 3$. Keďže políčko (a,b) musí mať bielu farbu, ostávajú prípady $(a,b) \in \{(1,2),(2,1)\}$. Vďaka symetrii sa môžeme obmedziť na prípad $a = 2$ a $b = 1$. Podobnou úvahou ukážeme, že pre súradnice pravého horného rohu uvažovaného pravouholníka stačí uvažovať možnosti $(2L-1, 2K)$ a $(2L, 2K-1)$. Aby však pravouholník mal strany nepárnej dĺžky, pravý horný roh musí byť $(2L, 2K-1)$. V takomto prípade ľahko nahliadneme, že stačí, aby mravec prešiel ľavý stĺpec z políčka $(1,1)$ na políčko $(1,2K)$ a potom horný riadok z políčka $(1,2K)$ na políčko $(2L,2K)$.

Ostáva určiť počet pravouholníkov s bielymi rohmi. Každý taký pravouholník je jednoznačne určený jeho ľavým dolným rohom (a,b) a pravým horným rohom (c,d). Navyše čísla a, b, c a d musia spĺňať $1 \leqq a \leqq c \leqq 2L$, $1 \leqq b \leqq d \leqq 2K$, čísla a a c majú rovnakú paritu a čísla b a d majú opačnú paritu ako číslo a. V prípade, že číslo a je nepárne, existuje $\binom{L+1}{2}$ možností pre dvojice (a,c) a nezávisle na tom $\binom{K+1}{2}$ možností pre párne dvojice (b,d). V prípade, že a je párne, dostaneme rovnako veľa prípustných pravouholníkov. Preto počet všetkých MEMOrovaných pravouholníkov je

$$2\binom{K+1}{2}\binom{L+1}{2} = \frac{K(K+1)L(L+1)}{2}.$$

T-4. *V Happy City je 2014 obyvateľov označených A_1, A_2, ..., A_{2014}. V každom okamihu dňa je každý obyvateľ buď šťastný alebo nešťastný. Nálada obyvateľa A sa zmení (z nešťastnej na šťastnú alebo opačne) práve vtedy, ak sa usmeje nejaký iný šťastný obyvateľ na obyvateľa A. Na začiatku v Happy City bolo N šťastných obyvateľov. V pondelok počas dňa sa udialo nasledovné: obyvateľ A_1 sa usmial na obyvateľa A_2, potom sa obyvateľ A_2 usmial na obyvateľa A_3, atď. Nakoniec sa obyvateľ A_{2013} usmial na obyvateľa A_{2014}. Okrem toho sa nikto iný neusmial na nikoho iného. Rovnako to prebehlo aj v utorok, stredu a vo štvrtok. Na konci dňa vo štvrtok bolo v Happy City presne 2000 šťastných obyvateľov. Určte najväčšiu možnú hodnotu N.* (Litva)

Riešenie. Každému šťastnému obyvateľovi Happy City priraďme číslo -1 a každému nešťastnému $+1$. Takéto priradenie nám umožňuje jednoducho popísať zmenu v šťastí obyvateľa: Ak sa obyvateľ A s číslom a usmeje na obyvateľa B s číslom b, nové číslo obyvateľa B bude ab.

Uvažujme situáciu, keď obyvatelia majú priradenú postupnosť čísel u_1, u_2, ..., u_{2014}. Na konci dňa sa postupnosť priradených čísel zmení na v_1, v_2, ..., v_{2014}, pričom $v_i = u_1 u_2 \dots u_i = v_{i-1} u_i$. Z toho dostávame $u_i = v_i v_{i-1}$.

Označme a_1, a_2, ..., a_{2014} postupnosť čísel priradených vo štvrtok večer, b_1, b_2, ..., b_{2014} v stredu večer, c_1, c_2, ..., c_{2014} v utorok večer, d_1, d_2, ..., d_{2014} v pondelok večer a e_1, e_2, ..., e_{2014} v pondelok ráno. Pre jednoduchosť zápisu definujme $a_i = b_i = c_i = d_i = e_i = 1$ pre všetky celé čísla $i \leqq 0$. Pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, 2014\}$ dostávame

$$
\begin{aligned}
b_i &= a_i a_{i-1},\\
c_i &= b_i b_{i-1} = a_i a_{i-1}^2 a_{i-2} = a_i a_{i-2},\\
d_i &= c_i c_{i-1} = a_i a_{i-1} a_{i-2} a_{i-3},\\
e_i &= d_i d_{i-1} = a_i a_{i-4}.
\end{aligned}
$$

Nech x_j označuje počet jednotiek v postupnosti a_j, a_{j+4}, a_{j+8}, ... Použitím tohto označenia vieme zapísať počet nešťastných obyvateľov vo štvrtok večer ako $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$.

Pozrime sa teraz na to, koľko obyvateľov mohlo mať v pondelok ráno priradené číslo -1. Keďže $e_i = a_i a_{i-4}$, môže e_i nadobúdať hodnotu -1 len v prípade, že práve jedno z čísel a_i, a_{i-4} je rovné 1. Preto pre $j = 1, 2, 3, 4$, počet členov postupnosti e_j, e_{j+4}, e_{j+8}, ... rovných -1 môže byť maximálne $2x_j + 1$, pričom $2x_j$ členov prislúcha nešťastným obyvateľom vo štvrtok večer a jeden obyvateľ navyše je v prípade, že $a_j = -1$ a $j - 4 \leqq 0$. Preto v pondelok ráno mohlo byť maximálne $2x_1 + 1 + 2x_2 + 1 + 2x_3 + 1 + 2x_4 + 1 = 32$ šťastných obyvateľov.

Posledným krokom riešenia je ukázať situáciu, v ktorej bolo v pondelok ráno 32 šťastných obyvateľov a ktorá je v súlade so zadaním. Uvažujme prípad $a_8 = a_{16} = \dots = a_{8 \cdot 14} = 1$ a $a_i = -1$ pre všetky ostatné i. To znamená, že vo štvrtok večer bolo práve 14 nešťastných a teda 2000 šťastných obyvateľov. Jednoducho môžeme overiť, že takúto situáciu vo štvrtok večer môžeme dostať zo situácie v pondelok ráno, pri ktorej $e_1 = e_2 = e_3 = -1$, $e_4 = e_8 = \dots = e_{4 \cdot 29} = -1$ a $e_i = 1$ pre ostatné i. V tomto prípade je počet šťastných obyvateľov v pondelok ráno $3 + 29 = 32$.

T-5. *Daný je trojuholník ABC, pre ktorý platí $|AB| < |AC|$. Kružnica vpísaná trojuholníku ABC so stredom I sa dotýka strán BC, CA a AB postupne v bodoch D, E a F. Priamka AI pretína priamky DE a DF postupne v bodoch X a Y. Označme Z pätu výšky z bodu A na stranu BC. Dokážte, že D je stred kružnice vpísanej trojuholníku XYZ.* (Nemecko)

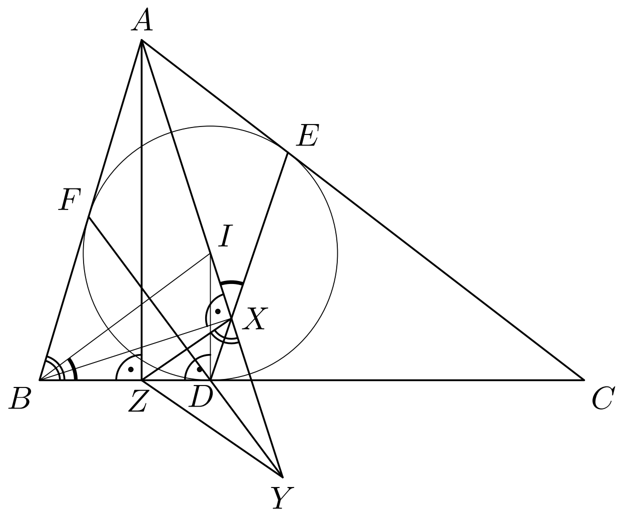
Riešenie. Zrejme bod X leží medzi bodmi A a Y (obr. 3). Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC označme ako zvyčajne α, β, γ. Platí

$$|\measuredangle EXI| = |\measuredangle DEC| - |\measuredangle XAE| = \left(90^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma\right) - \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\beta = |\measuredangle DBI|,$$

odkiaľ dostávame, že štvoruholník $BDXI$ je tetivový, a teda

$$|\measuredangle AXB| = |\measuredangle IXB| = |\measuredangle IDB| = 90^\circ = |\measuredangle AZB|.$$

Z toho vyplýva, že aj štvoruholník $ABZX$ je tetivový. Odtiaľ $|\measuredangle ZXY| = \beta$ a keďže $|\measuredangle DXY| = |\measuredangle EXI| = \frac{1}{2}\beta$, dokázali sme, že bod D leží na osi uhla ZXY. Podobne možno dokázať, že D leží na osi uhla XYZ. Z toho už vyplýva dokazované tvrdenie.



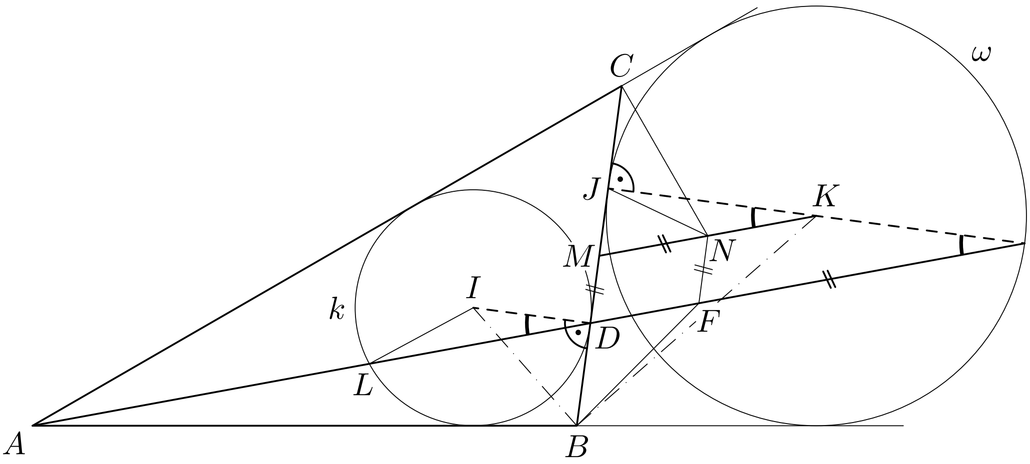
Obr. 3

Poznámka. Alternatívny spôsob, ako dokončiť riešenie úlohy po dokázaní, že štvoruholník $ABZX$ je tetivový, je nasledovný: Vieme, že $|\measuredangle DZX| = \frac{1}{2}\alpha$ a podobne $|\measuredangle YZD| = \frac{1}{2}\alpha$. Takže ZD je os uhla YZX. Ostáva len overiť, že $|\measuredangle YDX| = 90^\circ + \frac{1}{2}|\measuredangle YZX|$. Vieme, že $|\measuredangle YZX| = \alpha$ a

$$|\measuredangle YDX| = |\measuredangle FDB| + |\measuredangle CDE| = \left(90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta\right) + \left(90^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma\right) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha.$$

T-6. *Kružnica k vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strany BC v bode D. Nech $L \neq$ $\neq D$ je priesečník priamky AD a kružnice k a nech K je stred kružnice pripísanej k strane BC. Označme M a N postupne stredy úsečiek BC a KM. Dokážte, že body B, C, N a L ležia na jednej kružnici.* (Slovensko, Patrik Bak)

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|AB| \leqq |AC|$. Označme ω kružnicu pripísanú k strane BC trojuholníka ABC a E priesečník priamky AD a kružnice ω, ktorý je ďalej od D. Rovnoľahlosť so stredom A, ktorá zobrazí k na ω, zobrazí bod D na bod E. Navyše priamka EK je kolmá na stranu BC a pretína ju v bode J, ktorý je dotykovým bodom ω s BC. Keďže bod K je stredom JE a – ako vieme[2] – bod M je stredom DJ, sú priamky MK a DE rovnobežné (obr. 4).



Obr. 4

Veďme bodom N rovnobežku s BC a jej priesečník s DE označme F. Potom štvoruholník $DFNM$ je rovnobežník. Aplikovaním Tálesovej vety na pravouhlý trojuholník MKJ dostávame $|JN| = |MN| = |DF|$. Z toho vyplýva, že $DFNJ$ je rovnoramenný lichobežník, a keďže $|BD| = |JC|$, aj $BFNC$ je rovnoramenný lichobežník. Z toho dôvodu je tiež tetivovým štvoruholníkom a stačí ukázať, že body B, C, F, L ležia na jednej kružnici. Urobíme to tak, že dokážeme rovnosť $|DB| \cdot |DC| = |DL| \cdot |DF|$.

Nech I je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC a $|\measuredangle ABC| = \beta$. Pravouhlé trojuholníky BDI a KJB majú ostré uhly s veľkosťami $\frac{1}{2}\beta$ a $90° - \frac{1}{2}\beta$, sú teda podobné. Preto

$$|DI| \cdot |JK| = |DB| \cdot |JB| = |DB| \cdot |DC|$$

a ostáva overiť, že $|DI| \cdot |JK| = |DL| \cdot |DF|$.

Keďže $AE \parallel MK$ a $ID \parallel JK$, dostávame $|\measuredangle IDL| = |\measuredangle JED| = |\measuredangle JKM|$, preto rovnoramenné trojuholníky ILD a NKJ sú podobné a tým je dokázané, že $|DI| \cdot |JK| =$ $= |DL| \cdot |JN|$. Už skôr sme ukázali, že $|JN| = |DF|$, z čoho dostávame požadovanú rovnosť.

[2] Je známe, že pri štandardnom označení dĺžok strán trojuholníka ABC platí $|BD| = |CJ| = s - b$, pričom $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

T-7. *Konečná množina A kladných celých čísel sa nazýva priemerová, ak pre každú jej neprázdnu podmnožinu je aritmetický priemer jej prvkov taktiež kladné celé číslo. Ináč povedané, A je priemerová, ak $(a_1 + \ldots + a_k)/k$ je celé číslo pre každé $k \geqq 1$, kde $a_1, \ldots, a_k \in A$ sú navzájom rôzne. Pre ľubovoľné celé číslo n určte najmenší možný súčet prvkov priemerovej n-prvkovej množiny.* (Rakúsko)

Riešenie. Označme S_n hľadaný najmenší možný súčet prvkov priemerovej n-prvkovej množiny. Dokážeme, že $S_n = n + \frac{1}{2}n(n+1)D_n$, pričom $D_1 = D_2 = 2$ a pre $n \geqq 3$ je D_n najmenším spoločným násobkom prvkov množiny $\{1, \ldots, n-1\}$.

Príkladom priemerovej množiny, ktorej súčet prvkov nadobúda uvedenú hodnotu, je množina

$$A_n = \{1 + j \cdot D_n \mid j = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Naozaj, nech $1 + j_1 D_n, \ldots, 1 + j_k D_n$ je nejakých jej k rôznych prvkov. Ak $1 \leqq k < n$, tak ich aritmetický priemer

$$\frac{(1 + j_1 D_n) + \ldots + (1 + j_k D_n)}{k} = 1 + (j_1 + \ldots + j_k) \cdot \frac{D_n}{k}$$

je celé číslo, pretože D_n/k je celé číslo. Ak $k = n$, tak ich aritmetický priemer je

$$\frac{(1 + j_1 D_n) + \ldots + (1 + j_k D_n)}{k} = 1 + (n-1) \cdot \frac{D_n}{2}, \tag{1}$$

čo je celé číslo, pretože D_n je vždy párne. Súčet prvkov množiny A_n je n-násobkom výrazu (1), čiže práve $n + \frac{1}{2}n(n-1)D_n$.

Uvažujme teraz ľubovoľnú n-prvkovú priemerovú množinu $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, pričom $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Dokážeme, že súčet jej prvkov je aspoň $n + \frac{1}{2}n(n-1)D_n$.

Pre $n = 1$ a $n = 2$ to triviálne platí, preto predpokladajme, že $n \geqq 3$. Použijeme nasledovné pomocné tvrdenie: Ak prirodzené čísla i, j spĺňajú $1 \leqq i < j \leqq n$, tak $a_i \equiv a_j \pmod{D_n}$.

Dôkaz. Uvažujme ľubovoľné celé číslo k spĺňajúce $1 \leqq k < n$ a nech $r_1, \ldots, r_{k-1}$ je ľubovoľných $k-1$ rôznych indexov z množiny $\{1, 2, \ldots, n\} - \{i, j\}$. Keďže A je priemerová, súčty $a_i + a_{r_1} + \ldots + a_{r_{k-1}}$ a $a_j + a_{r_1} + \ldots + a_{r_{k-1}}$ sú deliteľné číslom k a teda je ním deliteľný aj ich rozdiel $a_i - a_j$. To dokazuje, že $a_i - a_j$ je násobkom každého z čísel $1, 2, \ldots, n-1$ a teda tiež násobkom ich najmenšieho spoločného násobku D_n.

Z uvedeného tvrdenia máme $a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \equiv a_n \pmod{D_n}$, preto existujú celé čísla $0 = j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ také, že $a_i = a_1 + j_i \cdot D_n$. Odtiaľ dostávame

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_n &= na_1 + (j_1 + j_2 + \ldots + j_n)D_n \geqq \\ &\geqq n + (0 + 1 + \ldots + (n-1))D_n = n + \frac{1}{2}n(n-1)D_n, \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať.

T-8. *Určte všetky štvorice (x, y, z, t) kladných celých čísel, pre ktoré platí*

$$20^x + 14^{2y} = (x + 2y + z)^{zt}.$$

(*Litva*)

Riešenie. Ukážeme, že jediným riešením je štvorica $(x, y, z, t) = (1, 1, 3, 1)$.

Predpokladajme, že (x, y, z, t) je jedno z riešení. V prípade, že $z = t = 1$, dostávame upravenú rovnicu $20^x + 14^{2y} = x + 2y + 1$. Pritom $20^x > 2^x \geqq x + 1$ a $14^{2y} > 2y + 1$. Sčítaním a využitím vyššie upravenej rovnice dostávame $x+2y+1 > (x+1)+(2y+1)$, čo je spor. Preto $zt > 1$.

Ak by x bolo párne, mali by sme

$$20^x + 14^{2y} \equiv (-1)^x + (-1)^{2y} \equiv 2 \pmod 3.$$

Zároveň, aby bola splnená rovnosť (keďže ľavá strana je vždy párna), muselo by aj z byť párne. V tom prípade by však pravá strana bola štvorcom a jej zvyšok po delení troma by nemohol byť 2.

Preto x, a teda aj z, sú nepárne. Z toho dostávame

$$20^x + 14^{2y} \equiv (-1)^x + (-1)^{2y} \equiv (-1) + 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

čiže $x + 2y + z$ je deliteľné tromi. Keďže $zt > 1$, máme

$$0 \equiv 20^x + 196^y \equiv 2^x + 7^y \pmod 9,$$

z čoho vyplýva

$$2^{x+2y} \equiv 2^x \cdot 4^y \equiv (-7^y) \cdot 4^y \equiv -28^y \equiv -1 \pmod 9.$$

Vyšetrením zvyškov mocnín čísla 2 po delení deviatimi ľahko nahliadneme, že na platnosť predošlej kongruencie je nutné, aby $x + 2y$ bolo deliteľné tromi, čiže aj $z = (x + 2y + z) - (x + 2y)$ musí byť deliteľné tromi.

Poznamenajme, že x ani y nemôžu byť deliteľné tromi. V opačnom prípade by totiž museli byť obe deliteľné tromi a dostali by sme netriviálne riešenie Fermatovej rovnice $a^3 + b^3 = c^3$, ktoré, ako vieme, neexistuje. K rovnakému záveru možno dospieť aj bez použitia uvedeného poznatku, a to analýzou rovnice modulo 13: Ak by bolo $x/3$ nepárne celé číslo, mali by sme

$$20^x + 14^{2y} \equiv \left(20^3\right)^{x/3} + 1^{2y} \equiv 5^{x/3} + 1 \equiv 6 \text{ alebo } 9 \pmod{13}.$$

Na druhej strane, štvorec čísla môže po delení číslom 13 dávať iba zvyšky 0, 1, 5, 8 a 12.

Najskôr predpokladajme, že $x \neq y$ a označme $a = \min\{x, y\}$. Všimnime si, že 2^{2x} je najväčšou mocninou dvoch, ktorá delí 20^x, zatiaľ čo 2^{2y} je najväčšou mocninou dvoch, ktorá delí 14^{2y}. Z toho vyplýva, že 2^{2a} je najväčšou mocninou dvoch, ktorá delí $20^x + 14^{2y}$. Vzhľadom na to, že $3 \mid z$, je nutne aj a deliteľné tromi, čo je v spore s predošlým zistením, že žiadne z čísel x, y nie je deliteľné tromi. Nutne teda $x = y$.

Využitím všetkých doterajších záverov dostávame

$$(3x+z)^{zt} = 20^x + 14^{2x} = 4^x(5^x + 49^x) = 4^x \cdot 54 \cdot A,$$

pričom

$$A = 5^{x-1} - 49 \cdot 5^{x-2} + 49^2 \cdot 5^{x-3} - \ldots + 49^{x-1},$$

čiže

$$A \equiv (-1)^{x-1} - 1 \cdot (-1)^{x-2} + \ldots + 1 \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 \equiv x \not\equiv 0 \pmod 3.$$

Číslo $(3x+z)^{zt} = 4^x \cdot 54 \cdot A = 2^{2x+1} \cdot 3^3 \cdot A$ nie je deliteľné 3^4. Preto $zt < 4$ a keďže $3 \mid z$, nutne $z = 3$ a $t = 1$.

Ak by bolo $x > 1$, dostali by sme

$$27(x+1)^3 = (3x+3)^3 = 20^x + 14^{2x} > 14^{2x} = 14^x \cdot 14^x > 14^2 \cdot 8^x > 27 \cdot (2^x)^3 \geqq 27(x+1)^3,$$

čo je očividný spor. Takže $x = y = 1$ a jediným kandidátom na riešenie je štvorica $(1,1,3,1)$. Táto štvorica naozaj vyhovuje – hodnota na oboch stranách zadanej rovnice je pre ňu 216.