2002/2003
52. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 30. 3. – 2. 4. 2003.*)

1. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 7,\\ x^2y + xy^2 &= -2. \end{aligned}$$

(*J. Földes*)

2. Vnútri strán BC, CA, AB daného trojuholníka ABC zvolíme postupne body D, E, F tak, aby sa úsečky AD, BE, CF pretťali v jednom bode, ktorý označíme G. Ak je možné štvoruholníkom $AFGE$, $BDGF$, $CEGD$ vpísať kružnice, z ktorých každé dve majú vonkajší dotyk, potom je trojuholník ABC rovnostranný. Dokážte. (*M. Tancer*)

3. Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom $x_1 = 1$ spĺňa pre každé $n > 1$ podmienku

$$x_n = \pm(n-1)x_{n-1} \pm (n-2)x_{n-2} \pm \ldots \pm 2x_2 \pm x_1$$

s vhodnou voľbou znamienok „+“ a „−“. Rozhodnite, či je možné, aby nerovnosť $x_n \neq 12$ platila len pre konečne veľa indexov n. (*P. Černek*)

4. V rovine je daný tupý uhol AKS. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby jeho strana BC ležala na priamke KS, aby bod S bol jej stredom a bod K jej priesečníkom s osou protiľahlého uhla BAC. (*P. Leischner*)

5. Ukážte, že v číselnej sústave s ľubovoľným základom $z \geqq 3$ existujú dvojmiestne čísla A a B, ktoré sa líšia len poradím svojich číslic a majú túto vlastnosť: Kvadratická rovnica $x^2 - Ax + B = 0$ má v obore reálnych čísel dvojnásobný koreň. Dokážte tiež, že pre daný základ z je taká dvojica A, B jediná. Napríklad v desiatkovej sústave ($z = 10$) sú to jedine čísla $A = 18$ a $B = 81$. (*J. Šimša*)

6. Ak súčin kladných čísel a, b, c je rovný 1, potom platí

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqq a + b + c.$$

Dokážte. (*P. Kaňovský*)