2001/2002
51. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 26. novembra 2001.*)

1. Ak je S obsah trojuholníka so stranami a, b, c a T je obsah trojuholníka so stranami $a+b$, $b+c$, $c+a$, potom platí $T \geqq 4S$. Dokážte a zistite, kedy nastane rovnosť.
(*P. Kaňovský*)

2. V obore celých čísel x, y riešte rovnicu

$$(x_5)^2 + (y^4)_5 = 2xy^2 + 51,$$

kde n_5 označuje násobok piatich najbližší k číslu n, napríklad $(-9)_5 = -10$.
(*P. Černek*)

3. V danom trojuholníku ABC pretína os uhla ACB stranu AB v bode K a opísanú kružnicu v bode L ($L \neq C$). Označme V stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, S stred kružnice opísanej trojuholníku KBV a Z priesečník priamok AB a SL. Dokážte, že priamka SK je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku KLZ. (*J. Földes*)

4. Nech $n \geqq 2$ je dané prirodzené číslo. Pre ktoré hodnoty reálneho parametra p má sústava rovníc

$$\begin{aligned} x_1^4 + \frac{2}{x_1^2} &= px_2, \\ x_2^4 + \frac{2}{x_2^2} &= px_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}^4 + \frac{2}{x_{n-1}^2} &= px_n, \\ x_n^4 + \frac{2}{x_n^2} &= px_1 \end{aligned}$$

aspoň dve riešenia v obore reálnych čísel? (*J. Švrček*)

5. Nájdite všetky mnohočleny $P(x)$ s reálnymi koeficientmi, ktoré pre každé reálne číslo x spĺňajú rovnosť

$$(x+1)\,P(x-1) + (x-1)\,P(x+1) = 2x\,P(x).$$

(*E. Kováč*)

6. Nájdite všetky štvorsteny, ktoré majú sieť tvaru deltoidu a práve štyri hrany danej dĺžky a. (Deltoidom rozumieme konvexný štvoruholník, ktorý je súmerný podľa jedinej zo svojich uhlopriečok, nepatrí k nim ani štvorec, ani kosoštvorec.) (*P. Leischner*)