65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016

Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9

<u>*Informácia pre krajskú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

---

1. *Obdĺžnik má dĺžky strán v pomere* $2:5$. *Keď predĺžime všetky jeho strany o 9 cm, dostaneme obdĺžnik, ktorého dĺžky strán sú v pomere* $3:7$. *V akom pomere budú dĺžky strán obdĺžnika, ktorý vznikne predĺžením všetkých strán o ďalších 9 cm?*

(Michaela Petrová)

Riešenie. Dĺžky strán pôvodného obdĺžnika sú v pomere $2:5$. To znamená, že ich dĺžky (v centimetroch) môžeme označiť $2x$ a $5x$. Po prvom predĺžení strán má obdĺžnik rozmery $2x+9$ a $5x+9$. Keďže dĺžky strán tohto obdĺžnika sú v pomere $3:7$, musí platiť:

$$\frac{2x+9}{5x+9}=\frac{3}{7}.$$

Po vyriešení rovnice dostávame $x = 36$ (cm). Rozmery pôvodného obdĺžnika sú $2\cdot 36 = 72$ (cm) a $5\cdot 36 = 180$ (cm).

Po druhom predĺžení strán má obdĺžnik rozmery $72+18=90$ (cm) a $180+18=198$ (cm). Pomer dĺžok strán tohto obdĺžnika teda je

$$90:198=5:11.$$

Návrh hodnotenia. 2 body za označenie rozmerov pôvodného obdĺžnika a vyjadrenie ich zmeny; 2 body za zostavenie a vyriešenie rovnice; 2 body za výpočet konečných rozmerov obdĺžnika a ich pomeru.

---

2. *Traja kamaráti si mysleli tri navzájom rôzne nenulové cifry, z ktorých jedna bola 3. Z týchto cifier vytvorili všetkých šesť možných trojciferných čísel, ktoré potom rozdelili do troch dvojíc. Rozdielom prvej dvojice čísel bolo jednociferné číslo, rozdielom druhej dvojice čísel bolo dvojciferné číslo a rozdielom tretej dvojice čísel bolo trojciferné číslo deliteľné piatimi. Zistite, aké tri cifry si mohli kamaráti myslieť. Určte všetky možnosti.*

(Erika Novotná)

Riešenie. Myslené cifry označíme a, b a c, pričom bez ujmy na všeobecnosti predpokladáme, že $a<b<c$. Z uvažovaných čísel mohol jednociferný rozdiel vzniknúť jedine ako rozdiel dvoch čísel začínajúcich rovnakou cifrou. Preto stačí uvažovať nasledujúce tri možnosti:

1) Ak by jednociferný rozdiel vznikol ako

$$\overline{acb}-\overline{abc}=(100a+10c+b)-(100a+10b+c)=9(c-b),$$

tak by platilo $c-b=1$, tzn. $c=b+1$ (zodpovedajúci rozdiel by bol 9). Ostatné rozdiely vzniknuté zo zvyšných čísel $\overline{cba}$, $\overline{cab}$, $\overline{bca}$ a $\overline{bac}$ by potom mohli byť:

$$\begin{aligned}
\overline{cba}-\overline{cab}&=9(b-a),\\
\overline{cba}-\overline{bca}&=90,\\
\overline{cba}-\overline{bac}&=100+10(b-a)+(a-c),\\
\overline{cab}-\overline{bca}<\overline{cab}-\overline{bac}&=99,\\
\overline{bca}-\overline{bac}&=9(c-a).
\end{aligned}$$

Trojciferný rozdiel možno dostať iba ako $\overline{cba}-\overline{bac}$. Tento rozdiel má byť podľa zadania deliteľný piatimi. Poslednou cifrou rozdielu nemôže byť nula, lebo $a\neq c$, rozdiel preto končí cifrou 5. A keďže sme stanovili, že $c>a$, muselo by platiť $c=a+5$, a teda $b=a+4$ (zodpovedajúci rozdiel by bol $100+40-5=135$). Rozdiel zvyšných čísel $\overline{cab}$ a $\overline{bca}$ by potom bol dvojciferný ($\overline{cab}-\overline{bca}=100-50+4=54$). Jediná vyhovujúca trojica cifier obsahujúca 3 je 3, 7, 8.

2) Ak by jednociferný rozdiel vznikol ako $\overline{bca}-\overline{bac}$, tak by platilo $c-a=1$, tzn. $c=a+1$. V takom prípade neexistuje b, pre ktoré by platilo $a<b<c$.

3) Ak by jednociferný rozdiel vznikol ako $\overline{cba}-\overline{cab}$, tak by platilo $b-a=1$, tzn. $b=a+1$ (zodpovedajúci rozdiel by bol 9). Podobnými úvahami ako v prvom prípade zistíme, že trojciferný rozdiel možno zo zvyšných čísel $\overline{bca}$, $\overline{bac}$, $\overline{acb}$ a $\overline{abc}$ dostať iba ako $\overline{bca}-\overline{abc}$. Aby bol tento rozdiel deliteľný piatimi, muselo by platiť $c=a+5$, a teda $c=b+4$ (zodpovedajúci rozdiel by bol $100+40-5=135$). Rozdiel zvyšných čísel $\overline{bac}$ a $\overline{acb}$ by potom bol dvojciferný ($\overline{bac}-\overline{acb}=100-50+4=54$). Jediné vyhovujúce trojice cifier obsahujúce 3 sú 2, 3, 7 a 3, 4, 8.

Kamaráti si mohli myslieť cifry 3, 7, 8 alebo 2, 3, 7 alebo 3, 4, 8.

Návrh hodnotenia. 1 bod za možnosti vzniku jednociferného rozdielu; 2 body za všetky vyhovujúce trojice čísel (1 bod za aspoň jednu takú trojicu); 3 body podľa kvality a úplnosti zdôvodnenia, že viac trojíc neexistuje.

---

3. *Na papieri bolo napísaných niekoľko bezprostredne po sebe idúcich kladných násobkov určitého prirodzeného čísla väčšieho ako jedna. Rado ukázal na jedno z napísaných čísel: keď ho vynásobil číslom, ktoré s ním susedilo naľavo, dostal súčin o 216 menší, ako keď ho vynásobil číslom, ktoré s ním susedilo napravo. Na ktoré číslo mohol Rado ukázať? Nájdite všetky možnosti.* (*Libor Šimůnek*)

Riešenie. Prirodzené číslo, ktorého násobky boli napísané na papieri, označme n; podľa zadania je $n>1$. Dotyčné čísla na papieri tak môžeme označiť

$$(k-1)n,\quad kn,\quad (k+1)n,$$

pričom neznáma k je prirodzené číslo; aby boli všetky tri výrazy kladné, musí byť $k>1$. Rado tak dostal súčiny $(k-1)kn^2$ a $(k+1)kn^2$, ktorých rozdiel je $2kn^2$. Platí $2kn^2=216$, po úprave

$$kn^2=108=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3.$$

Pri rešpektovaní podmienok $n > 1$ a $k > 1$ dostávame tri rôzne riešenia:

n	2	3	6
k	27	12	3
kn	54	36	18

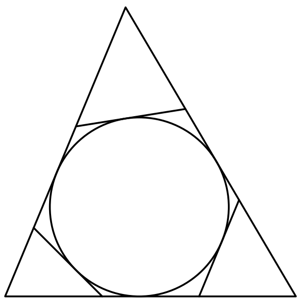
Existujú tri možné čísla, na ktoré mohol Rado ukázať: 54, 36 alebo 18.

Návrh hodnotenia. 2 body za rovnicu $kn^2 = 108 = 2^2 \cdot 3^3$ alebo jej obdobu; po 1 bode za každé riešenie vyhovujúce zadaniu; 1 bod za správne formulovaný záver.

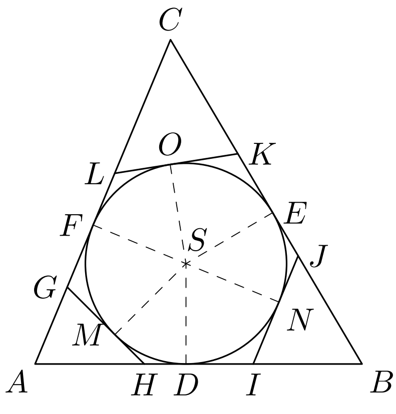
Vypísanie dotyčných troch členov postupnosti nie je nevyhnutnou súčasťou riešenia. Pre názornosť ich uvádzame: a) 52, 54, 56; b) 33, 36, 39; c) 12, 18, 24.

---

4. *Eva vpísala do daného trojuholníka kružnicu. Potom dokreslila tri úsečky, ktoré sa dotýkali vpísanej kružnice a v pôvodnom trojuholníku vytvárali tri menšie trojuholníky, pozri obrázok. Obvody týchto troch trojuholníkov boli 12 cm, 14 cm a 16 cm. Určte obvod pôvodného trojuholníka.* (Erika Novotná)



Riešenie. Označme ako na nasledujúcom obrázku vrcholy pôvodného trojuholníka A, B, C, body dotyku vpísanej kružnice D, E, F a jej stred S, krajné body dokreslených úsečiek G, H, I, J, K, L a ich body dotyku s kružnicou M, N, O.



Úsečky HD a HM sú dotyčnicami z bodu H ku kružnici, preto sú uhly HDS a HMS pravé. Zodpovedajúce trojuholníky HDS a HMS majú spoločnú stranu HS a zhodné odvesny SD a SM tvoriace polomery vpísanej kružnice. Z Pytagorovej vety vyplýva, že aj odvesny HD a HM sú zhodné, tzn. $|HD| = |HM|$.

Z rovnakého dôvodu platí aj $|GF| = |GM|$, teda obvod trojuholníka AHG je rovný

$$|AH| + |HM| + |MG| + |GA| = |AH| + |HD| + |FG| + |GA| = |AD| + |AF|. \qquad (*)$$

To znamená, že obvod rohového trojuholníka AHG je rovný súčtu vzdialeností bodu A od dotykových bodov na stranách AB a AC.

Rovnaká vlastnosť platí aj pre obvody zvyšných dvoch rohových trojuholníkov. Obvod trojuholníka ABC je preto rovný

$$12 + 14 + 16 = 42\,(\text{cm}).$$

Návrh hodnotenia. 2 body za poznatok $|HD| = |HM|$ a jeho použitie; 1 bod za jeho zdôvodnenie (možno akceptovať aj odkaz na súmernosť podľa priamky HS); 2 body za vyjadrenie obvodu rohového trojuholníka $(*)$; 1 bod za vyčíslenie obvodu trojuholníka ABC.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016