2001/2002
51. ročník MO — *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v utorok 15. januára 2002.*)

1. Do tabuľky 4×4 sú vpísané kladné reálne čísla tak, že súčin v každej pätici tvaru  je rovný 1. Zistite maximálny počet rôznych čísel zapísaných v tabuľke. (*P. Černek*)

2. Určte, koľko čísel môžeme vybrať z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 75\,599, 75\,600\}$ tak, aby medzi nimi bolo číslo 75 600 a aby pre ľubovoľné dve vybrané čísla a, b platilo, že a je deliteľom b alebo b je deliteľom a. (Uveďte všetky možnosti.) (*J. Földes*)

3. Nech k je polkružnica zostrojená nad priemerom AB, ktorá leží vo vnútri štvorca $ABCD$. Uvažujme jej dotyčnicu t_1 z bodu C (rôznu od BC) a označme P jej priesečník so stranou AD. Nech t_2 je spoločná vonkajšia dotyčnica polkružnice k a kružnice vpísanej trojuholníku CDP (rôzna od AD). Dokážte, že priamky t_1 a t_2 sú navzájom kolmé. (*J. Švrček*)

4. Pokiaľ máme $n \geqq 2$ prirodzených čísel, môžeme s nimi spraviť nasledujúcu operáciu: Vyberieme niekoľko z nich, ale nie všetky a každé z vybraných čísel nahradíme ich aritmetickým priemerom. Zistite, či je možné pre ľubovoľnú začiatočnú n-ticu dostať po konečnom počte krokov všetky čísla rovnaké, ak n sa rovná
a) 2 000, b) 35, c) 3, d) 17. (*J. Földes*)

5. Zistite, pre ktoré reálne čísla p má sústava

$$x^2y - 2x = p,$$
$$y^2x - 2y = 2p - p^2$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel. (*P. Černek*)

6. Je daný rovnostranný trojuholník MPQ. Nájdite množinu vrcholov C všetkých trojuholníkov ABC takých, že body P, Q sú päty výšok z vrcholov A, B a bod M je stred strany AB. (*J. Šimša*)